高専入試のための数学講座

ナレッジスター

2016 年 9 月 8 日

目次

第1章

$\boxed{1}$ の対策

平成 28 年度の高専入試の問題の配点を見てみよう．

第 1 問．50 点
第 2 問．15 点
第 3 問．15 点
第 4 問．20 点

このように，第 1 問の配点が 50 点分を占めている．さらに，仙台高専ではここに傾斜配点が加わるので，第 1 問だけで 600 点満点中，100 点分が占められることが分かる．

高専入試の問題で，第 1 問の内容は非常に基礎的で対策がないがしろになりがちな部分だが，実はここを「完答」できるかどうかが，かなり合否の鍵を握ってくることが分かるだろう．簡単な内容だからといって油断せず，次のスローガンを掲げて第 1 問対策を最初に徹底しよう．

第 1 問は絶対に落とすな!!

出題頻度が高い順から，効率的に点数を取れるように対策を行おう．

1.1　正負の数の計算問題

正の数，負の数の四則混合演算は，100 パーセント出題されると言って良いだろう．このような問題を「簡単だ！」と言って油断していると，思わぬところで細かいミスにやられてしまうことになる．ポイントは以下のとおり．

- 計算は**カッコの中から順番に!!**
- 四則演算の順序は，「$\times, \div$」$\rightarrow$「$+, -$」

なので，まずはカッコの中から処理をはじめ，その中で掛け算，割り算を優先して計算して行くという方針を取ると良い.

e.g. 次の計算をしなさい.

$$(-2)^4 \times \{-5-(-3+2)\}$$

[答]

$$\begin{aligned}(-2)^4 \times \{\,-5-(-1)\,\} &= (-2)^4 \times (-5+1)\\ &= (-2)^4 \times (-4)\\ &= 16 \times (-4) = -64.\end{aligned}$$

分数の割り算は，

ひっくり返して掛け算になおす

のを徹底しよう.

e.g. 次の計算をしなさい.

$$\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{4} \div \left(-\frac{5}{12}\right) - 1.$$

[答]

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{4} \div \left(-\frac{5}{12}\right) - 1 &= \frac{4}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times (-\frac{12}{5}) - 1\\ &= \frac{4}{5} + \frac{1}{10} - \frac{10}{10} = -\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

1.1.1　練習問題

次の計算をしなさい.

(1) $(-72) \div (+12) \div (-6)$
(2) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$
(3) $20 \div \dfrac{5}{9} \div \left(-\dfrac{1}{10}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$
(4) $-3^2 + \dfrac{5}{2} \div \left(-\dfrac{5}{4}\right) + (-3)^2$

1.2　文字と式の計算問題

出題頻度は「正負の数」と比較してやや下がるが，油断は出来ない単元だ.

e.g. 次の計算をしなさい.

$$(10x - 6) \times \frac{1}{2}$$

[答]

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 10x \times \frac{1}{2} - 6 \times \frac{1}{2}. \\ &= 5x - 3. \end{aligned}$$

次の問題は，「マイナスは分子全体にかかっている」ということを忘れがちな問題. ミスをしないようにしっかり意識しながら計算を行おう.

e.g. 次の計算をしなさい.

$$\frac{1}{7}(6x-5)-\frac{1}{2}(x-1)$$

[**答**]

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{6x-5}{7}-\frac{x-1}{2} \\
&= \frac{2(6x-5)}{14}-\frac{7(x-1)}{14} \\
&= \frac{12x-10}{14}-\frac{7x-7}{14} \\
&= \frac{12x-10-(7x-7)}{14} \\
&= \frac{12x-10-7x+7}{14} \\
&= \frac{5x-3}{14}.
\end{aligned}$$

1.2.1 練習問題

次の計算をしなさい.

(1) $2(x+1)-3(x-5)$

(2) $15\left(\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x-2}{5}\right)$

(3) $\dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{2x+3}{4}$

1.3 平方根の計算問題

平方根の問題は,形を変えながら何度も登場する.特に,ここで挙げるような基礎的な計算問題は非常に出題頻度が高い.ポイントは,

- $\sqrt{\ }$ の中身が複雑なときは,素因数分解を利用して $a\sqrt{b}$ の形になおす.
- 分母に $\sqrt{\ }$ があるときは必ず有理化を行う.
- $\sqrt{a}$ は文字のように扱って,同類項はまとめる.たとえば,

$$2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-3\sqrt{3}.$$

e.g. 次の計算をしなさい.

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{18}-\frac{5}{\sqrt{50}}$$

[答]

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{50}}{50} \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\frac{25\sqrt{2}}{50} \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

e.g. 次の計算をしなさい.

$$5\sqrt{12}-\frac{18}{\sqrt{3}}+\sqrt{175}$$

[答]

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 5\times(2\sqrt{3})-\frac{18\sqrt{3}}{3}+5\sqrt{7} \\
&= 10\sqrt{3}-6\sqrt{3}+5\sqrt{7} \\
&= 4\sqrt{3}+5\sqrt{7}.
\end{aligned}$$

1.3.1 練習問題

次の計算をしなさい.

(1) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}+\dfrac{12}{\sqrt{6}}$

(2) $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\div\dfrac{9\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(3) $2(\sqrt{3}+2\sqrt{2})-(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(4) $5\sqrt{12} - \dfrac{18}{\sqrt{3}} + \sqrt{175}$

1.4 式の展開

式の展開は，単体の問題として出題されることはあまり多くないが，式の展開をすぱっと出来ることは高専の入試問題では前提とされるので，公式を使ってさっさと処理できるように特訓しておこう．

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

さっそく例題をやってみる．分配法則でダラダラと計算することなく，**すぱっと公式で処理**出来てしまうようになってほしい．

e.g. 次の計算をしなさい．

$$(x-1)^2 - (x+2)(x-8)$$

[答]

$$\begin{aligned} \text{与式} &= x^2 - 2x + 1 - (x^2 - 6x - 18) \\ &= 4x + 19. \end{aligned}$$

1.4.1 練習問題

次の計算をしなさい．

(1) $(x+4)(x-2) - (x-3)^2$

(2) $(x+5)(x-2) + (x+4)(x-4)$

(3) $(x+4)^2 + (x-1)(x-7)$

(4) $(a-3b)(a+3b) - a(a-3b)$

1.5　因数分解

展開が「カッコのついた式のカッコを外す」ことだとしたら，因数分解は「展開された式をカッコのついた形に戻す」ことだった．

因数分解では，以下の「鉄則」を絶対に忘れてはいけない．特に，最初のステップを忘れてしまう学生は非常に多い．まずは「共通因数」を探すのが先．

(i) 共通因数でくくる!!
(ii) 公式を使って因数分解!!

e.g. 次の式を因数分解せよ．

$$3ax^2 + 9ax - 30a$$

[答]

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 3ax^2 + 9ax - 30a \\ &= 3a(x^2 + 3x - 10) \\ &= 3a(x+5)(x-2). \end{aligned}$$

e.g. 次の式を因数分解せよ．

$$x(x+7) - 8$$

[答]

$$\begin{aligned} \text{与式} &= x^2 + 7x - 8 \\ &= (x-1)(x+8). \end{aligned}$$

e.g. 次の式を因数分解せよ.

$$2(x-8)(x-5)-(x-8)^2$$

[答]

$$\begin{aligned}\text{与式} &= 2\underbrace{(x-8)}_{\text{共通因数}}(x-5)-\underbrace{(x-8)}_{\text{共通因数}}{}^2\\ &= (x-8)\{\,2(x-5)-(x-8)\,\}\\ &= (x-8)\{\,2x-10-x+8\,\}=(x-8)(x-2).\end{aligned}$$

1.5.1 練習問題

次の式を因数分解しなさい.

(1) $2x^2-18$

(2) $ax^2-2ax-8a$

(3) $(x+1)(x-7)-20$

(4) $(x-2)^2+6(x-2)+5$

(5) $(x-5)^2+2(x-5)-63.$

1.6 平方根のいろいろな問題

平方根の問題は，計算問題にかぎらずさまざまな形で出題される.

e.g.

n を 1 けたの自然数とする．$\sqrt{n+18}$ が整数となるような n の値を求めよ．

[答] $\sqrt{\ }$ の中身が a^2 の形になれば良い．

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

のどれかになるためには，$n+18=25$ あたりが良さそうなので，これを解くと，$n=7$. ちなみに，$n+18=36$ だと $n=18$ になってしまい 2 桁になってしまうから不適．よって，$n=7$.

e.g.

$\sqrt{90n}$ の値が自然数となるような自然数 n のうち最も小さいものを求めよ．

[答]

これも，「$\sqrt{\ }$ の中身を a^2」の形にしたい！というモチベーションでやってみよう．まず，90 を素因数分解すると，$90=2\times3^2\times5$. これにできるだけ小さい n をかけて a^2 の形にしたいので，$n=2\times5=10$ だと分かる．

e.g.
$x=\sqrt{5}+1$ のとき，x^2-2x+1 の値を求めよ．
[答]
いきなり代入したら計算がめんどくさすぎて死ぬので気をつけよう．
こういうときは，式をいじってから代入するといい．

$$x^2-2x+1=(x-1)^2.$$

ここに $x=\sqrt{5}+1$ を代入すると，

$$(\sqrt{5}+1-1)^2=(\sqrt{5}^2)=5$$

これで一撃だ．

1.6.1 練習問題

(1) $\frac{2}{5},-0.9,-3,\sqrt{6}$ の中で絶対値が最も大きい数を答えなさい．
(2) $\sqrt{a}<3$ にあてはまる正の整数 a の個数を求めよ．
(3) $x=4+\sqrt{2011}$ のとき，x^2-8x+7 の値を求めよ．
(4) $x=2\sqrt{3}+2\sqrt{2},y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき，x^2-4y^2 の値を計算せよ．

1.7 2次方程式

2 次方程式は**解の公式**を用いると，どんなものでも必ず解ける．

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

しかし，計算が面倒になりがちなので，**平方根や因数分解で解決できるときはするべき**だ[*1]．つまり，2 次方程式は次のような順番で解き方を決定すると良い．

[*1] 解の公式はショベルカーのようなものだという話．ショベルカーがあればどんな穴でも掘れる．しかし，家庭菜園で種を植えるための穴をショベルカーで掘ったらそれはバカである．家庭菜園の穴はスコップで掘れば良い．

ショベルカー→解の公式，スコップ→因数分解, 平方根の利用など．

1. **平方根を用いた解き方**をできないかどうか考える.

   例 : $(x+1)^2 = 3, x^2 = 5$ など

2. 左辺 $= 0$ に直して**因数分解**を使えないかどうかを考える[*2]

   例 : $x^2+2x = -1 \;\Rightarrow\; x^2+2x+1 = 0$ にすれば左辺が $(x+1)^2$ と因数分解できる.

3. どちらも上手く行かなかったら，スパッと**解の公式**に切り替えて解く.

   例 : $x^2+3x+1 = 0 \;\Rightarrow\;$ 平方根の形にもできない．因数分解もできなさそう.

   $$\Rightarrow\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

   解の公式に切り替えるときは，スパッと思い切るのが重要.

e.g.

$$(x-1)^2 = 3$$

を解きなさい.

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 3 && \to (x-1) \text{ を 2 乗すると } 3 \\ x-1 &= \pm\sqrt{3} && \to \text{ということは } x-1 = \pm\sqrt{3} \\ x &= 1 \pm \sqrt{3}. && \to x =\sim \text{ の形にした.} \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目への変形では，**両辺の平方根をとる (2 乗をはずす)** という操作をしている．このとき，$\pm$ を絶対に忘れずに．**「根には ± がつく」**と覚えよう.

[*2] 「共通因数でくくる」のも，因数分解の 1 つ．忘れがちだが，忘れないようにしよう.

$$例 : x^3+5x^2+6x = 0 \;\Rightarrow\; x(x+2)(x+3) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, -2, -3.$$

.

e.g.

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

を解きなさい.

$$(x+1)(x+2) = 0 \qquad \to \text{左辺を因数分解}$$
$$x = -1, -2 \qquad \to x+1=0, x+2=0 \text{ より}$$

e.g.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

を解きなさい.

$$(x-2)^2 = 0 \qquad \to \text{左辺を因数分解}$$
$$x = 2 \qquad \to \text{解が 1 つしか出てこないこともある.}$$

e.g.

$$2x^2+3x+1=0$$

を解きなさい．

$$\underbrace{2}_{a}x^2+\underbrace{3}_{b}x+\underbrace{1}_{c}=0 \qquad \rightarrow \text{係数「}a,b,c\text{」を読み取る．}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times1}}{2\times2} \qquad \rightarrow \text{解の公式に代入．}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{4} \qquad \rightarrow \text{分母と分子を計算．}$$

$$x=-\frac{1}{2},-1 \qquad \rightarrow \pm\text{の両方の解がでてくる．}$$

中学校の段階では，$\sqrt{\ }$ の中身がマイナスになることはない．もし $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになったら，基本的に計算ミスを疑うようにするべし．

1.7.1　練習問題

次の 2 次方程式を解きなさい[*3]．

(i) $2x^2=26x-60$
(ii) $x^2+1=3$
(iii) $x^2+x-42=0$
(iv) $x^2+11x+25=0$
(v) $(x+2)^2=1-(x+2)^2$
(vi) $x^2+6x=0$
(vii) $x^2+7x=-5$

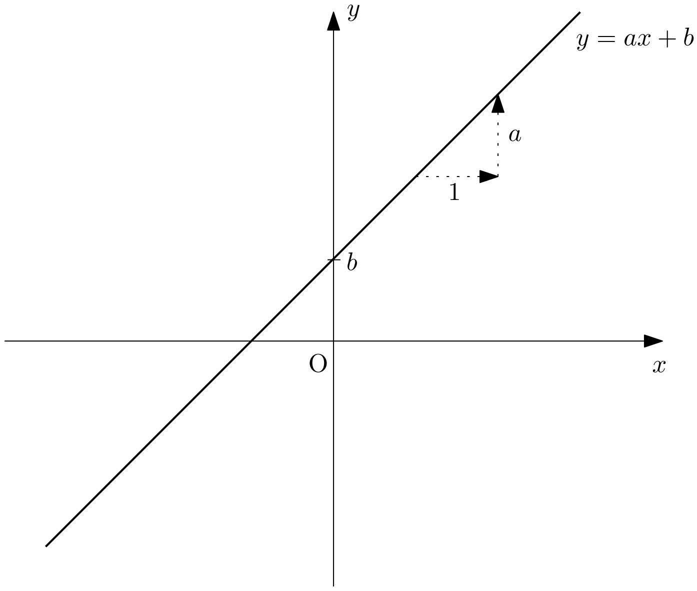
1.8　1 次関数の基本

1 次関数とは，以下のような形の関数のこと．

$$y=ax+b.$$

[*3] この問題は**最適な解き方がランダムな形**で並んでいる．常に**最適な解き方はどれなのか**ということを念頭に．最適な解き方を選び続けたほうが，かなり時間が短縮できる．

a を**傾き**, b を**切片**という．この a, b が分かれば，1 次関数の式が決まったことになる．



e.g. 2 点 $(4, -7), (-3, 14)$ をとおる直線の式を求めなさい．

与えられた 2 点の x, y 座標をそれぞれ $y = ax + b$ に代入し，2 本の式を作ろう．

$$\begin{cases} -7 = 4a + b \\ 14 = -3a + b \end{cases}$$

加減法で解くと，$a = -3, b = 5$ とわかるので，$y = -3x + 5$ が求める直線の式．

e.g. y は x の 1 次関数で，そのグラフが $(1, 3)$ を通り，$y = -2x$ に平行であるとき，この 1 次関数の式を求めよ．

「平行 $\Longleftrightarrow$ 傾きが等しい」ということに気をつけよう．
つまり，**「$y = -2x$ に平行 $\Longleftrightarrow$ 傾きが -2」**と読み替えて解けば良い．求める直線は…

- グラフが $(1, 3)$ を通る． $\to$ $\underline{x = 1, y = 3}$.
- 傾きが -2. $\to$ $\underline{a = -2}$.

なので，$y = ax + b$ にこれらを代入すると，$3 = -2 \times 1 + b$ となり，$b = 5$. よって，求める直線は $y = -2x + 5$.

e.g. 2 つの直線 $y = -x - 3$ と $y = -3x + 5$ の交点の座標を求めなさい.

交点の座標は，2 つの直線の式を連立方程式にして解けば求められる.

$$\begin{cases} y &= -3x + 5 \\ y &= -x - 3 \end{cases}$$

$y = ...$ の形になっているので，1 本目の式と 2 本目の式の右辺をイコールで結ぶと，

$$-3x + 5 = -x - 3.$$

この 1 次方程式を解くと，$x = 4$. さらにこれを 2 本目の式に代入して，$y = -4 - 3 = -7$. よって交点の座標は $(4, -7)$.

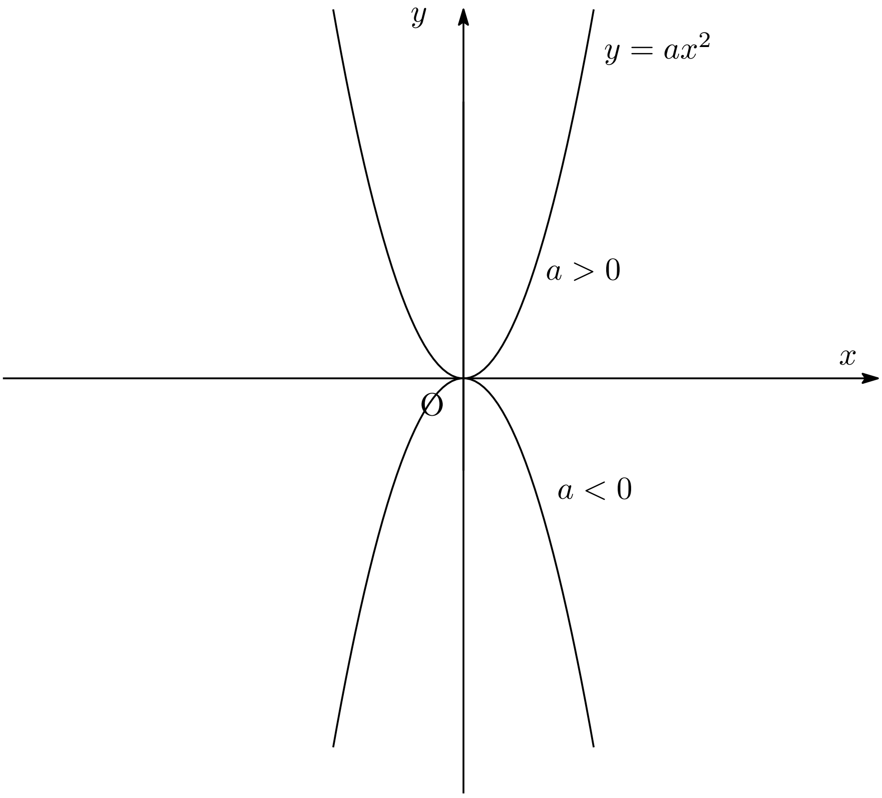
1.8.1　練習問題

(i) 点 $(a, 2)$ が 1 次関数 $y = \frac{1}{5}x + 3$ のグラフ上にあるとき，a の値を求めよ.
(ii) 2 点 $(3, 2), (5, 6)$ を通る直線の式を求めよ.
(iii) $y = 3x + 7$ のグラフに平行で，グラフが点 $(5, 2)$ を通る.
(iv) 2 点 $(0, 6), (-3, 0)$ を通る直線 ℓ と，2 点 $(0, 10), (10, 0)$ を通る直線 m がある．ℓ, m の交点 A の座標を求めよ.

1.9　2 乗に比例する関数の基本

$y = ax^2$ という形の関数を **2 乗に比例する関数**という．a を比例定数という．高専入試における出題確率は非ッッッッッ常に高い．2 乗に比例する関数のグラフは，次に示す**放物線**になる.

- $a > 0$ ならば，放物線は下に凸.
- $a < 0$ ならば，放物線は上に凸.
- y 軸に対して線対称.
- a の絶対値が大きい方が開き方が小さく，絶対値が小さいほうが開き方が大きくなる.



e.g.
$y = 2x^2$ で，$x = 3$ のときの y の値を求めなさい．

1 次関数などのときと同じように，$x = 3$ を $y = 2x^2$ に代入すればよい．

$$y = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18.$$

e.g.
y は x の 2 乗に比例し，$x = 2$ のとき $y = 12$ である．y を x の式で表しなさい．

$y = ax^2$ に，$x = 2, y = 12$ を代入すると，

$$12 = 2^2 a$$

これを a について解くと，$a = 3$. よって，$y = 3x^2$.

e.g.
y が x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき $y=12$ になる．$x=4$ のとき y の値を求めなさい．

$y=ax^2$ に $x=2, y=12$ を代入すると，$12=2^2a$．a を求めると $a=3$．
あとは，$y=3x^2$ に $x=4$ を代入して，$y=3\times 4^2=48$ とわかる．

e.g.
$y=5x^2$ において，$y=20$ となるときの x の値を求めなさい．

$y=20$ を代入すると，

$$5x^2=20.$$

よって，$x^2=4$. 両辺の平方根をとって，$x=\pm 2$.

e.g.
$y=ax^2$ のグラフが点 $(4,8)$ を通る．このグラフにおいて $y=18$ となるときの x の値を求めなさい．

$y=ax^2$ に $x=4, y=8$ を代入すると，$8=16a$. よって $a=\frac{1}{2}$. $y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=18$ を代入すると，$18=\frac{1}{2}x^2$. $x^2=36$ の両辺の平方根を取ると，

$$x=\pm 6.$$

e.g.
$y=ax^2$ のグラフが 2 点 $(2,16)$ と $(-1,b)$ を通るとき，定数 b の値を求めなさい．

$y=ax^2$ に $x=2, y=16$ を代入すると，$16=2^2a$．よって $a=4$. $y=4x^2$ に $x=-1, y=b$ を代入すると，$b=4\times(-1)^2=4$.

1.9.1 練習問題

(i) y は x の 2 乗に比例し，$x=3$ のとき $y=18$ である．$x=-1$ のときの y を求めなさい．

(ii) y は x の 2 乗に比例し，$x=-2$ のとき $y=24$ である．$y=3$ のときの x の値を求めなさい．

(iii) まっすぐな道路に自動車が停止していて，その先端を A 地点とする．自動車が出発してから 20 秒後に，自動車の先端は A 地点から 160m 離れた B 地点を通過した．自動車が出発してから x 秒間に進む距離を ym とすると，$y=ax^2$ の関係があるという．このとき，a の値を求め，y を x の式で表しなさい．

1.10 変化の割合と変域

高専入試では，関数の**変化の割合**を求める問題，**変域**の問題が出題されることが多い．まずは「変化の割合」の意味，「変域」の意味を解説しよう．

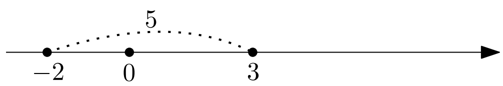
1.10.1 変化の割合は「グラフ的な意味」を理解しよう

まず最初に，以下の合言葉は常に意識することにしよう．

「増加量は $\boxed{\text{後}}-\boxed{\text{前}}$」!!

(例) $x=-2$ から $x=3$ まで変化した時の x の増加量は

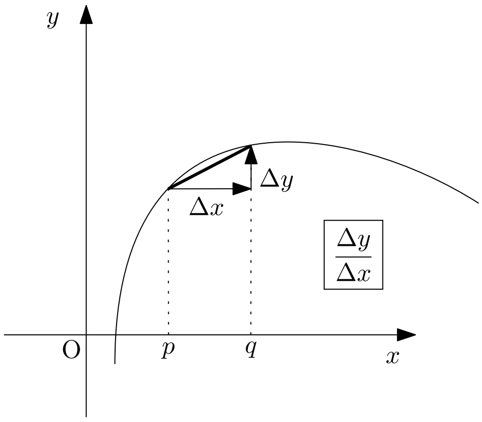
$$\underbrace{3}_{\text{後}}-\underbrace{(-2)}_{\text{前}}=5.$$



変化の割合とは，次のように計算されるものだ．

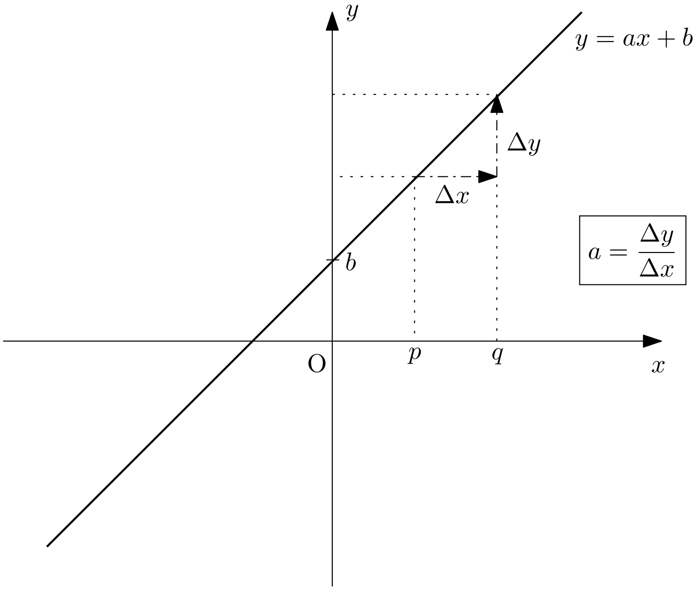
$$\text{変化の割合}=\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}.$$

$x=p$ から $x=q$ まで変化したときの変化の割合は，$x=p, x=q$ に対応するグラフ上の 2 点を結んでできる直線の傾きのことである（下図）．



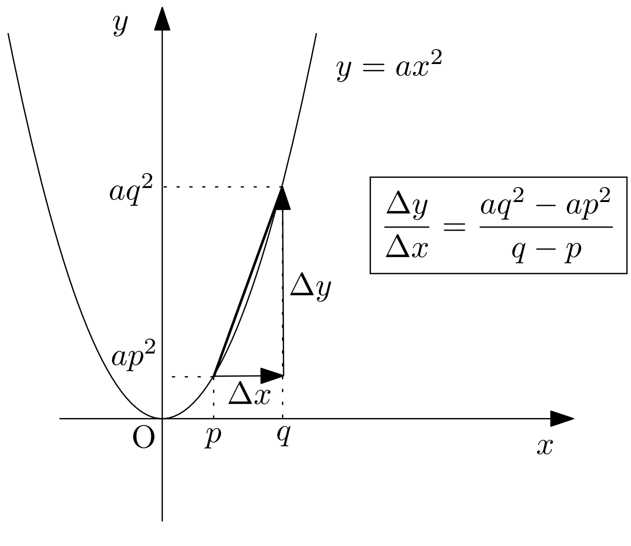
式だけ丸暗記するのではなく，変化の割合はこの**「グラフ的な意味」**を必ず大切にしてほしい.

1 次関数のときは，以下の図より，**変化の割合は傾きと等しくなる**.



> 1 次関数の場合，**「変化の割合＝傾き」**

2 乗に比例する関数 $y = ax^2$ の場合，$x = p$ から $x = q$ まで変化したときの変化の割合を考えてみよう.



2 乗に比例する関数で変化の割合を計算するとき，もちろんこの**意味を一番大切にして**

ほしいのだが，計算の際は簡単な公式を使うと早い．

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{aq^2 - ap^2}{q-p} \\ &= \frac{a(q^2-p^2)}{q-p} \\ &= \frac{a(q-p)(q+p)}{(q-p)} = a(p+q).\end{aligned}$$

e.g.
$y = 2x^2$ で，x の値が $x = 0$ から $x = 2$ まで増加するときの変化の割合を求めよ．

(1) **真面目に求める**

x の増加量は

$$2 - 0 = 2.$$

$x = 0$ のとき $y = 0, x = 2$ のとき $y = 8$ なので，y の増加量は

$$8 - 0 = 8.$$

変化の割合は

$$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{8}{2} = 4.$$

(2) **公式でさくっと求める**

$a = 2, p = 0, q = 2$ を $a(p+q)$ に代入すると．

$$a(p+q) = 4.$$

e.g.
2 つの関数 $y = x^2$ と $y = 8x - 3$ について，x の値が a から $a + 3$ まで増加するときの変化の割合が等しい．このとき，a の値を求めなさい．

- <u>$y = x^2$ **の** $x = a$ から $x = a + 3$ **まで増加した時の変化の割合**</u>

$$a(p+q) = 1 \times (a + a + 3) = 2a + 3.$$

- <u>$y = 8x - 3$ **の** $x = a$ から $x = a + 3$ **まで増加した時の変化の割合**</u>
  1 次関数の変化の割合は傾きと等しいので，変化の割合は 8.

これらが等しいと言われているので，

$$2a + 3 = 8.$$

よって，$a = \frac{5}{2}$.

1.10.2 練習問題

(i) 関数 $y = -3x^2$ について，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい.

(ii) 関数 $y = 5x^2$ について，変化の割合が 3，y の増加量が 1 のとき，x の増加量を求めなさい.

(iii) 関数 $y = \frac{3}{x}$ について，x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合を求めなさい.

(iv) 関数 $y = -\frac{12}{x}$ について，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい.

1.11 変域は「はんい」と読め!!

関数の「変域」に関する問題も，高専入試では頻出中の頻出．しかし，「変域」という言葉を聞いた瞬間に拒絶反応を示してしまう学生は少なくない.

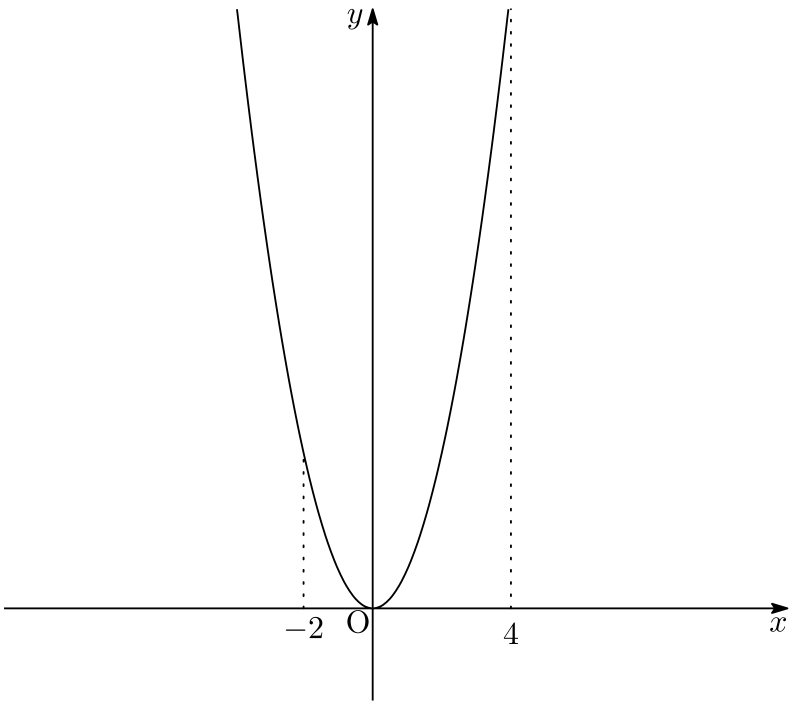
そこで，「変域」という言葉にたじろいでしまわないように，以下のことを提案しよう.

「変域」は「はんい」と読み替えよ!!

こうすれば，問題文が簡単に見えるはず．また，変域の問題を解くときは，**「常にグラフを意識する」のが，間違えずに解く鍵**だ.

e.g.
関数 $y=\dfrac{3}{2}x^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のときの y の変域を求めなさい．

グラフは以下のとおり．



このグラフから，y が一番小さいところは放物線の谷底．そして，一番大きいところは $x=4$ のところと分かるので，$x=4$ を $y=\frac{3}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{3}{2}\times 4^2=24$.

$$0 \leqq y \leqq 24$$

が求める変域である．

e.g.
関数 $y=-3x+b$ について，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域は $-8 \leqq y \leqq 10$ である．このとき，b の値を求めなさい．

$y=-3x+b$ のグラフは，切片はわからないが右肩下がりである．
つまり，$x=-4$（x が左側）のとき $y=10$, $x=2$(x が右側) のとき $y=10$ となる

ので，

$$10 = -3 \times -4 + b.$$

これを解いて，$b = -2$.

1.11.1 練習問題

(i) 関数 $y = -3x + 4$ で x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき y の変域を求めよ.
(ii) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ について，$-4 \leqq x \leqq 6$ のとき，y の変域を求めよ.
(iii) 関数 $y = -3x^2$ について，$-1 \leqq x \leqq 3$ のとき y の変域を求めよ.

1.12 確率

高専入試の第 1 問では，**確率の問題がほぼ必ず 1 問は出題される**．高専入試の確率の問題に関しては，次の方針で大体は解決してしまうので，徹底するようにしてほしい.

- 「2 つのサイコロ」の問題は，**表**を書く.
- その他の問題は，**樹形図**を書く[*4].

e.g.
1 から 6 までの目の出る大小 2 つのさいころを同時に投げるとき，出る目の数の和が素数になる確率を求めなさい．ただし，2 つのさいころは，どの目が出ることも同様に確からしいものとする.

まず，「同様に確からしい」というのは，**「変なサイコロではありませんよ」**という意味だと思うべし[*5].

こういうときは，大小 2 つのさいころの目について，次のような表を書く (縦が大きいサイコロ，横が小さいサイコロの目としよう．どっちでも良いのだが).

[*4] ただし，表を書いたほうがクリアに解ける問題もあるので，ケースバイケースといえばそうなのだが，ややこしくなるので，とりあえず最初は**「サイコロは表，その他は樹形図」**という方針を徹底することにする.
[*5] 「実は 1 が出やすい」とか「5 しか出ないようになっている」とか，そういう「おかしなサイコロ」は使ってないですよということだ.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3						
4						
5						
6						

問題文では，「2 つのサイコロの目の和」について聞かれているので，表に 2 つのサイコロの目の和を書き込もう．

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

和が素数[*6]になっているところに丸をつけると，

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

表のマス目 36 個のうち，丸がついているのは 15 個なので，確率は

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

[*6] 素数を小さい方から順に．

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

覚え方「$\underbrace{\text{兄さん}}_{2,3}\ \underbrace{5}_{5}$ 時に $\underbrace{\text{セブンイレブン}}_{7,11}\ \underbrace{\text{父さん}}_{13}\ \underbrace{\text{いいな}}_{17}$ とついて $\underbrace{\text{行く}}_{19}\ \underbrace{\text{兄さん}}_{23}\ \underbrace{\text{肉}}_{29}$ 屋へ $\underbrace{\text{さあ行こう}}_{31}$」

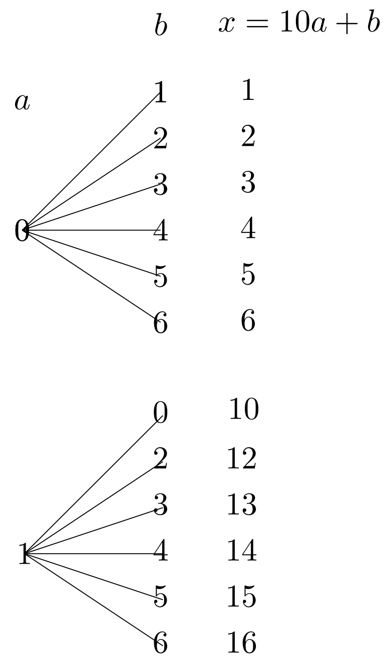
e.g.

$\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$が書かれたカードが 1 枚ずつ合わせて 7 枚ある．この中から 1 枚引き，引いたカードの数を a とする．引いたカードは戻さずにもう一枚引き，引いたカードの数を b とする．$x = 10a + b$ とするとき，x が 43 以上である確率を求めよ．ただし，x のつくられかたは，同様に確からしいものとする．

以下のことを認識しておこう．

- 1 枚目を引いて，戻さずに 2 枚目を引く．
- $x = 10a + b$ は，「10 の位が a, 1 の位が b」の数を表す．

1 枚目に $0, 1$ を引いた時の樹形図を書いてみると，



のような樹形図ができる．このような枝のかたまりが全部で 7 パターンできるので，樹形図の枝の総数は $6 \times 7 = 42$ 本となる．また，次のことに注目しよう．

- $a = 0, 1, 2, 3$ については，x が 43 以上にはなり得ないので，これらの枝は書く必要もカウントする必要もなし．
- $a = 4$ については，b の値によって x が 43 以上になったりならなかったりする．
- $a = 5, 6$ については，x は必ず 43 以上になるので，書かずとも全部カウントすれ

ば良い．

このうち，様子がわかりにくい「a が 4」の枝のうち，x が 43 以上のものをすべて書くと，

a	b	$x = 10a + b$
4	3	43
	5	45
	6	46

$x \geqq 43$ を満たす枝の本数は，

$$\underbrace{3}_{a=4} + \underbrace{6+6}_{a=5,6} = 15.$$

よって，求める確率は

$$\frac{15}{42} = \frac{5}{14}.$$

ちなみに，枝を全部書いて，$x \geqq 43$ のものを全部選んで... という方法で確率を計算しても良いが，枝を $6 \times 7 = 42$ 本書くのはえらい手間である．なので，このように「必要な分だけ書く/必要な分だけ数える」というのは，時間短縮に有効な手段だ[*7]．

1.12.1　練習問題

(i) 1 から 6 までの目の出る大，小 2 つのさいころを同時に 1 回投げ，大きいサイコロの出た目の数を a, 小さいサイコロの出た目の数を b とする．このとき，a を 10 の位の数字，b を一の位の数字として 2 桁の自然数を作るとき，作られる自然数が 210 の約数となる確率を求めよ．ただし，2 つのさいころはともに，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする．

(ii) 1 から 6 までの目の出る大，小 2 つのさいころを同時に 1 回投げ，大きいサイコロの出た目の数を a, 小さいサイコロの出た目の数を b とし，

$$n = ab$$

とおく．$\sqrt{111 - 3n}$ が自然数となる確率を求めよ．ただし，2 つのさいころはともに，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする．

(iii) 大小 2 つのさいころを同時に投げて，大きいさいころの出た目の数を a, 小さいさいころの出た目の数を b とする．このとき，縦の長さが a[cm], 横の長さが b[cm] とな

[*7] しかし，**短縮しようとしすぎて間違える**というのは本末転倒．あくまで「確実性」を担保した上で，時短を図るべし．

る 4 つの角がすべて直角の四角形を作る．四角形の周の長さが 20[cm] 以上となる確率を求めよ．

(iv) 3 枚の硬貨を同時に投げるとき，2 枚は表で 1 枚は裏となる確率を求めよ．ただし，それぞれの硬貨の裏表のでかたは同様に確からしいものとする．

(v) 1,2,3,4,5 の数字を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある．この 5 枚のカードの中から 2 枚を同時に取り出すとき，その 2 枚のカードの数字の和が偶数になる確率を求めよ．どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする．

(vi) 数の書いてある 5 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ が箱に入っている．この箱から 3 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出した 3 枚のカードに書いてある数の和が 3 の倍数である確率はいくらか．どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとして答えよ．

1.13　資料の整理，標本調査

資料の整理, 標本調査の問題も，毎年確実に 1 問は出題されている．

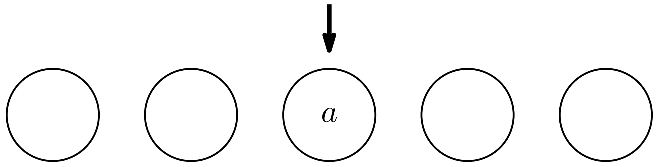
e.g.
収穫した 800 個のトマトから 50 個標本を無作為に抽出し，1 個ずつ重さを量ったところ，下の度数分布表のようになった．

階級 (g)	度数 (個)
以上　未満	
60∼70	2
70∼80	3
80∼90	5
90∼100	9
100∼110	8
110∼120	10
120∼130	6
130∼140	3
140∼150	1
150∼160	2
160∼170	1
合計	50

このとき，50 個の標本の中央値 (メジアン) が含まれる階級の階級値を求めなさい．また，収穫した 800 個のトマトのうち，90g 以上 120g 未満であるトマトの個数は，一の位を四捨五入して，約何個であると考えられるか．

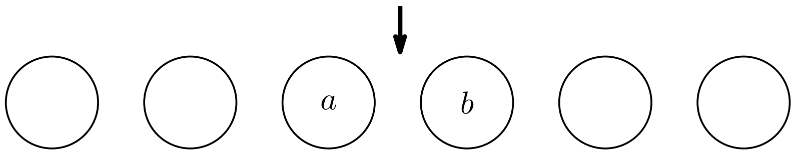
まず，**中央値 (メジアン)** とは，データを一列に並べたときに，「どまんなか」にくるデータの値のことを言う．ただし，データが奇数個のときと偶数個のときで，「どまんなか」の場所が変わるので，中央値の計算方法が以下のように異なる．

- **データが奇数個**



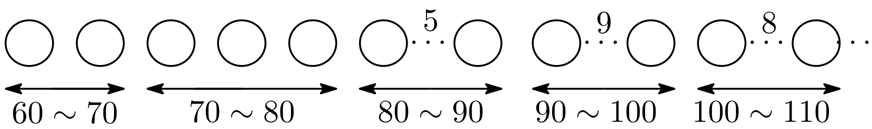
この場合，中央値は a となる．

- **データが偶数個**



この場合，中央値は a と b の平均, すなわち $\dfrac{a+b}{2}$ となる．

この問題では，データが全部で 50 個なので，「どまんなか」は，**25 個目と 26 個目の間**である．こういう問題は，以下のように実際に**ざっと適当に書いて並べてみる**のが良い．



25 個目のデータも，26 個目のデータも，100〜110 の階級に属している．

この問題では「階級値」を求めなさいと言われている．階級値とは，**階級の端と端の平均値**のこと．よって，100〜110 の階級の階級値を求めると，

$$\frac{100+110}{2} = 105.$$

次に，800 個のトマトを収穫したとき，**「90g 以上 120g 未満のトマトの個数」**を求めたい．

この問題を解くアイデア

800 個のときも，**50 個のときとだいたい同じ比率[a]だろう!!**

[a] 全体の中での**「比率（割合）」**のことを**相対度数**という．
例えば，90〜100 の階級の相対度数は？と聞かれたら，

$$\frac{9}{50}$$

と計算すれば良い．

50 個のときについて，90g 以上 120g 未満であるトマトの比率は

$$\frac{9+8+10}{50}=\frac{27}{50}.$$

800 個のときも同じくらいの比率になるはずなので，90g 以上 120g 未満のトマトは

$$\underbrace{800}_{\text{個数}}\times\underbrace{\frac{27}{50}}_{\text{比率}}=16\times 27=\text{約 }432\text{ 個}.$$

「1 の位を四捨五入しろ」といわれている[*8]ので，答えは **430 個**とわかる．

1.13.1　練習問題

(i) 次の表は，ある学級の生徒 37 人の最近 1 ケ月間に読んだ本の冊数を調べ，度数分布表にまとめたものである．このとき，冊数の中央値と最頻値[*9]をそれぞれ答えよ．また，冊数の平均値を，小数第二位を四捨五入して，小数第 1 位まで答えよ．

冊数 (冊)	度数 (人)
0	6
1	12
2	10
3	4
4	3
5	1
6	1
計	37

[*8] 別に，432 個と答えさせせば良いのに，なんともいじわるな，趣味の悪い問題である．こういうしょうもないトラップに引っかかってはいけない．

[*9] 最も度数が大きい冊数のこと．

(ii) 下の表は，ある学級の生徒の片道の通学時間をまとめたものである．表の (ア), (イ) にあてはまる数値を求めなさい．

通学時間 (分)	人数 (人)	相対度数
以上　未満		
0∼15	3	
15∼30	(イ)	
30∼45	14	
45∼60	9	0.25
60∼75	2	
75∼90	1	
合計	(ア)	

(iii) 次の表は，あるサッカーチームに所属する選手 20 人の年齢について，度数および相対度数をまとめたものである．$\boxed{\text{ア}}$∼$\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる数をそれぞれ求めよ．

年齢 (歳)	度数 (人)	相対度数
以上　未満		
18∼21	$\boxed{\text{ア}}$	0.35
21∼24	5	0.25
24∼27	2	0.10
27∼30	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$
30∼33	2	0.10
33∼36	1	0.05
合計	20	1.00

1.14 三平方の定理

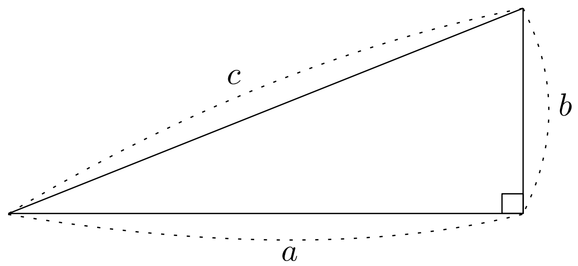
高専入試第一問の後半には，図形問題が出題される．平面図形の問題と空間図形の問題，どちらも出題される確率は高いが，だいたい出題される内容というのは限られている．特に出題される確率が高いのは

- 三平方の定理
- 円周角の定理
- 中点連結定理

の 3 つ．どれも中学 3 年の後半で学ぶ問題なので，学校で習ってから入試までの間に，これらの定理とあまり仲良くなるための時間がない．深く定着させるには，**早い内からこれらの定理に積極的に触れておく**ことが大切なわけだ．まず，三平方の定理から学んでいこう．

三平方の定理

下図のような直角三角形を考える．



このとき，$\underbrace{a^2+b^2}_{\text{斜辺以外}} = \underbrace{c^2}_{\text{斜辺}}$ が成り立つ．

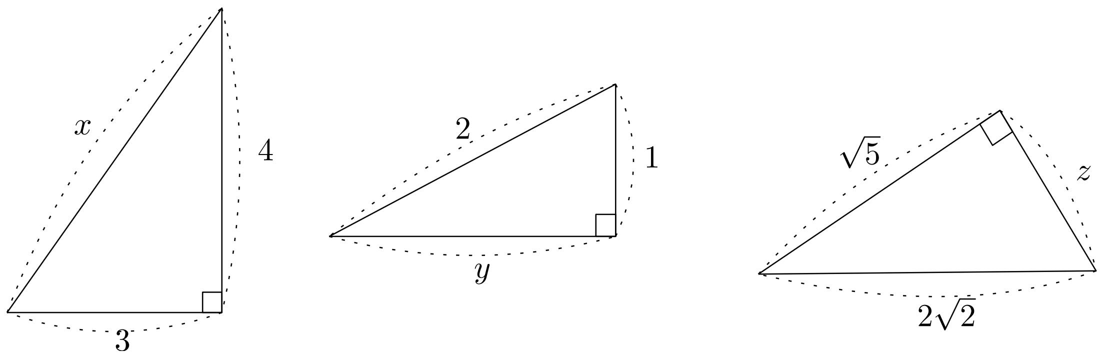
出題頻度がとにかく高い定理だ．この定理は

「直角三角形の 2 辺がわかるともう 1 辺がわかる」定理

という認識で捉えておくと，本番での応用がききやすい．

e.g.

次のそれぞれの直角三角形について，x, y, z の値を求めなさい．



ポイントは以下の 2 つ．

- どれが斜辺なのかに気をつける → 斜辺は**直角に向かい合う辺**!!
- その上で，あんまり深いこと考えずに**「とりあえず式を立てる」**．

とりあえず手を動かして「式を作ってみる」こと．高専入試に限らず，数学では**「とりあえずなんかやってみる」**のが何よりも大切だ[*10]．

まず最初の三角形．斜辺は x なので，

$$3^2 + 4^2 = x^2.$$

これを計算すると，

$$x^2 = 25.$$

これを解いて $x = \pm 5$ を得るが，x は辺の長さなので，$x > 0$ より，$x = 5$．

次に真ん中の三角形．斜辺は 2 なので式を作ってみると，

$$y^2 + 1^2 = 2^2.$$

[*10] **脱線．**

とりあえず式を作れば「計算」に持ち込める!!式を作って最初の 1 歩を踏み出すというイメージ．これがとにかく大事だ．

高専入試に向けて，我々はこれから，いろいろな難しそうに見える問題に出会う．しかし，どんなに「面食らってしまいそうな」問題でも，「面食らって立ち尽くしてしまう」のが一番良くないのだ．とにかく，出来ることをどんどんやってみる．そうすると，ひとつくらい，的を射た方針に出会う．的を射た方針は，何となく「行けそう」な気がするものだ．そうすると，意外にも簡単に答えにたどり着けてしまったりする．まずは「一歩踏み出す」ことを常に心がけよう．**立ち尽くしてしまうのが一番良くない**．

ここから y を求めれば良い．$y^2=3$. $y>0$ より $y=\sqrt{3}$.

最後の三角形．斜辺は $2\sqrt{2}$ なので，式を作ってみると，

$$(\sqrt{5})^2+z^2=(2\sqrt{2})^2$$

ルートの計算で間違わないように注意．

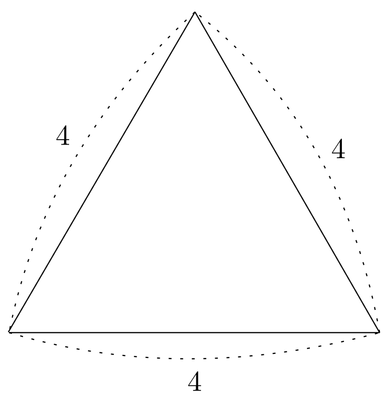
$$5+z^2=8$$

これを解くと，$z^2=3.z>0$ なので $z=\sqrt{3}$.

e.g.

1 辺の長さが 4 の正三角形の面積を求めよ．

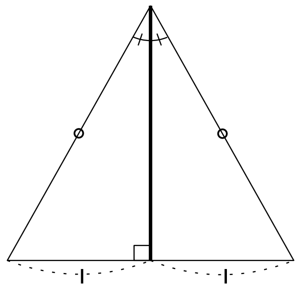
とりあえず，図を書いてみよう[*11]．



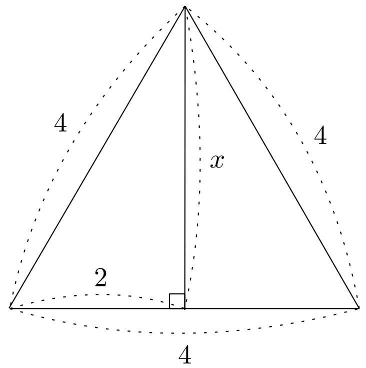
底辺はわかるが高さが分からないので，このままでは面積が求められない．まず高さを求めよう．その際次の 2 つのことに注意する．

- 正三角形は**二等辺三角形**の一種である[*12]．
- 二等辺三角形の**頂角の 2 等分線** $\Longleftrightarrow$ **底辺の垂直二等分線** (下図で理解).

[*11] 図形のことを文章で聞かれたら，必ず図を書いてきちっと理解する．これは鉄則．
[*12] 3 つの辺が等しいということは，当然 2 つの辺が等しいに決まってるだろうということ．



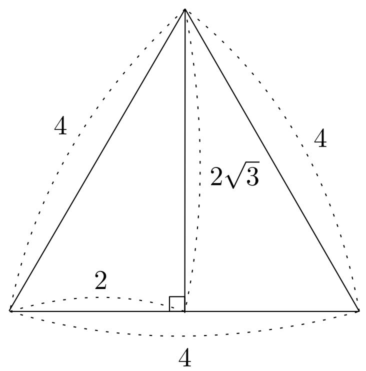
高さを x として，頂角から底辺に垂線を引くと，それは垂直二等分線（頂角の 2 等分線でもある）となるので，下図のようになる．



すると，正三角形は 2 つの直角三角形に分かれる．しかも，高さ x 以外の 2 辺が分かっているので，高さ x を三平方の定理で求められる[*13]．三平方の定理の式をたてると，

$$2^2 + x^2 = 4^2.$$

これを解くと，$x = 2\sqrt{3}$. これで高さが判明した．

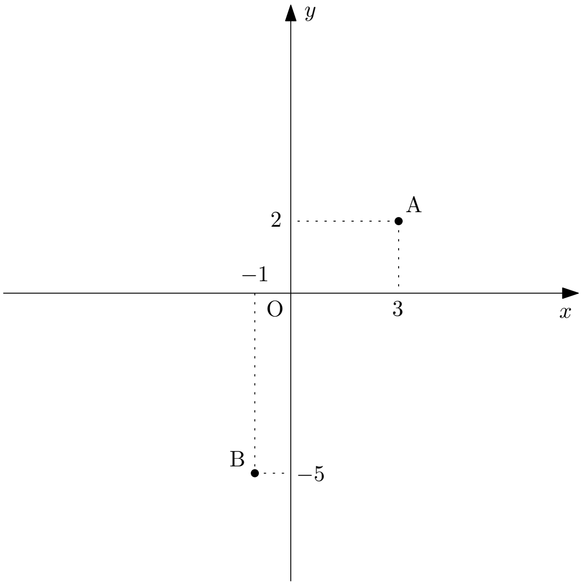


あとは，三角形の面積の公式で面積を計算すると，

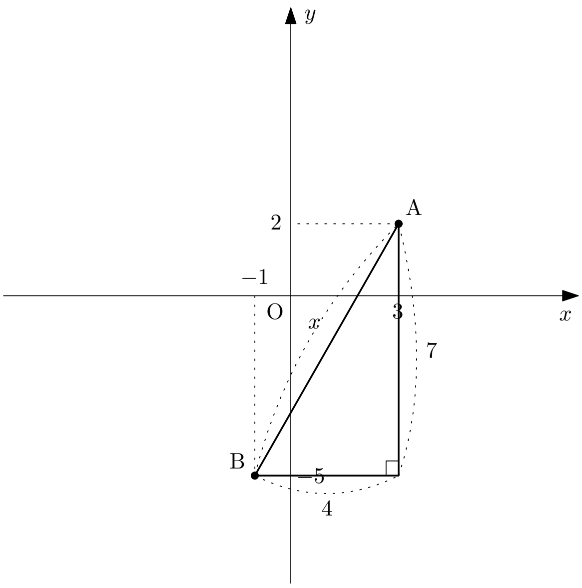
$$4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^2]$$

[*13] 三平方の定理は，直角三角形の **2 辺が分かればもう 1 辺がわかる**定理．

e.g.
次の点 A と点 B の距離を求めなさい.



2 点間の距離は，さまざまな問題を解く際に求める必要が出てくる．ポイントは，以下のような直角三角形が作れるということだ．



この直角三角形，**斜辺の長さ x が点 A と点 B の距離になっている**ので，三平方の定理で式を立てると，

$$4^2 + 7^2 = x^2.$$

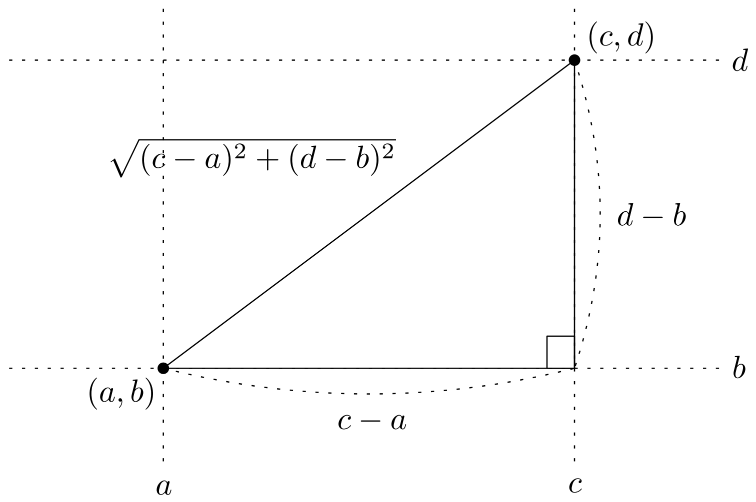
これを解くと，$x=\sqrt{65}$. これが点 A,B の距離である.

2 点間の距離については，次の公式でサクッと計算できるようになっておくと良い．ただし，公式を使っているときは常に**「直角三角形の存在」**を頭のなかで忘れないように.

2 点間の距離の公式

点 $(a,b),(c,d)$ の距離は

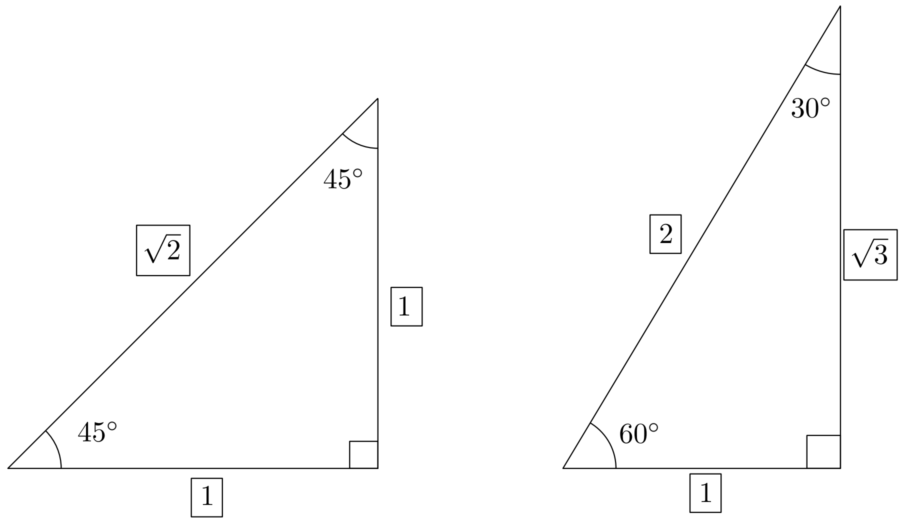
$$\sqrt{\underbrace{(c-a)^2}_{x\text{ 座標の引き算}}+\underbrace{(d-b)^2}_{y\text{ 座標の引き算}}}.$$



この節の最後に，三平方の定理に関連する最も重要な事実を挙げる．この事実は，高専入試で**「出題されない年はない」**というほどの重要事項．頭に入れないで試験にのぞむのはきわめて危険なので，意地でも頭に入れておこう．

「有名三角形の辺の比」

以下の有名な 2 つの直角三角形は，**辺の比と角度を必ずセットで覚えよ!!**



覚え方は $\underbrace{\textbf{「いったいいったいるーとに」}}_{\mathbf{1{:}1{:}\sqrt{2}}}$ $\underbrace{\textbf{「いったいにーたいるーとさん」}}_{\mathbf{1{:}2{:}\sqrt{3}}}$

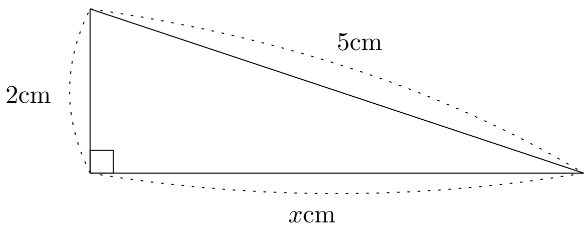
とにかく，図形の問題といったらこの「有名三角形の辺の比」が必要とされることのなんと多いことか．

- **角度→辺の比を求める**
- **辺の比→角度を求める**

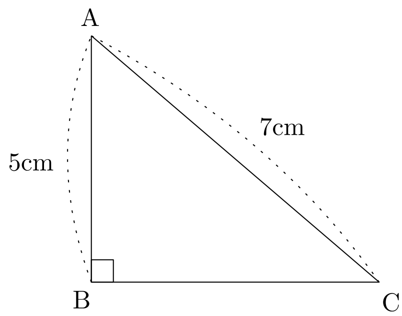
このどちらのパターンも，(特に高専入試では) 超重要なので，絶対に忘れないように!!

1.14.1　練習問題

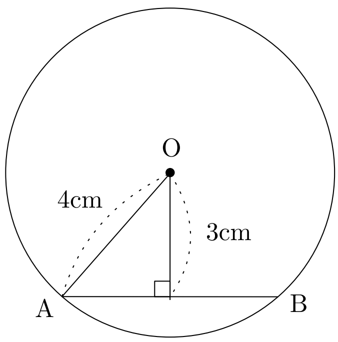
(i) 図の直角三角形について，x の値を求めよ．



(ii) 図のような $\angle ABC = 90^\circ$ である直角三角形 ABC について，AB$=$ 5cm, AC$=$ 7cm のとき，ΔABC の面積を求めよ．



(iii) 図のような半径 4cm の円 O がある．中心 O から距離が 3cm である弦 AB の長さを求めよ．



1.15　円周角の定理

円 O を考えよう.

(1) 弧 AB を決める.

(2) 弧の両端と円周上の点をつないで出来る角度

　　→ 弧 AB に対する**円周角**（図でいうと $\angle$APB, $\angle$AQB）.

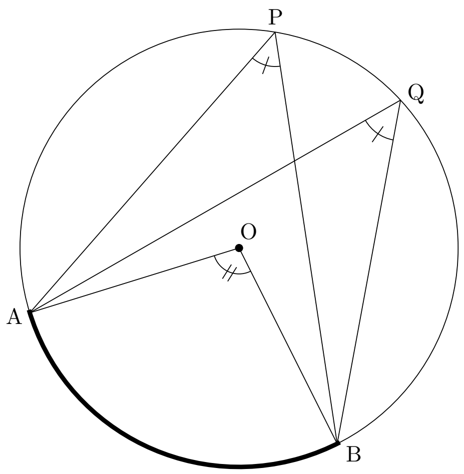
　弧の両端と円の中心をつないで出来る角度

　　→ 弧 AB に対する**中心角** (図でいうと $\angle$AOB).

円周角と中心角の間には，次の重要な定理が成り立つ.

円周角の定理

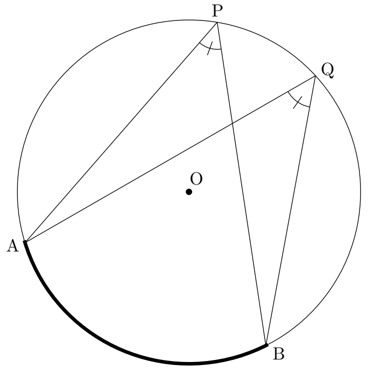
　1 つの弧に対する**円周角は中心角の半分**.



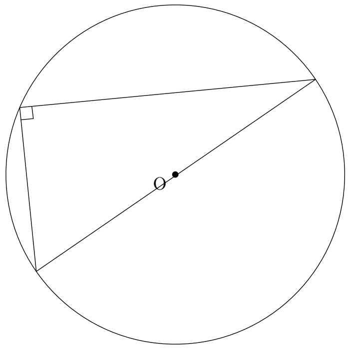
また，円周角の定理から出てくる次のことも，必ず覚えておこう.

大事な性質[a]

- 同じ弧に対する円周角は等しい.

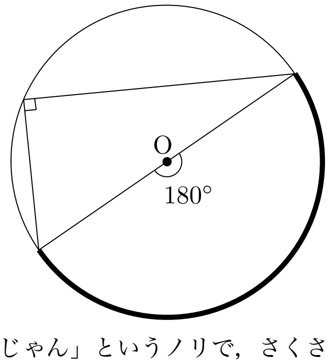


- 直径の円周角は 90°.



[a] これらの性質は呼吸をするかの如く使いこなせるようになってほしいのだが,「丸暗記すべき衝撃の事実」というわけではない. どちらも円周角の定理からすぐに導き出せる「当たり前の事実」でしかない.

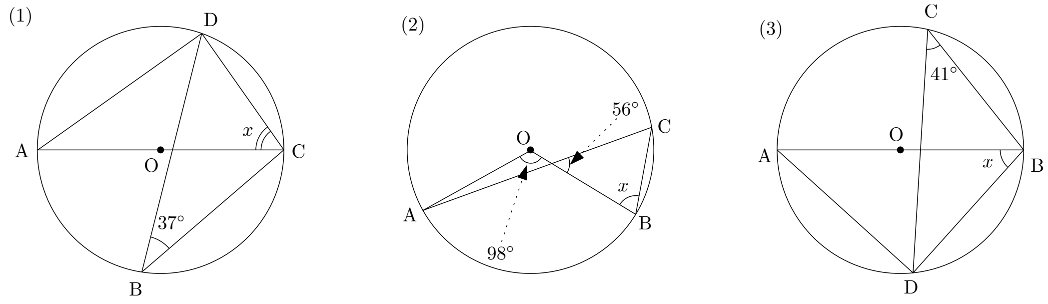
- **同じ弧に対する円周角は等しい**
  同じ弧に対するどの円周角も,「中心角の半分」である. 弧に対して中心角は 1 つしかないので, どの円周角も同じ大きさになる.
- **直径の円周角は 90°**
  直径は, 円の半分を弧として切り取る. その弧に対する中心角は 180° であり, 円周角はその半分なので 90° である.



「丸暗記」ではなく,「当たり前じゃん」というノリで, さくさくと使いこなしてほしい.

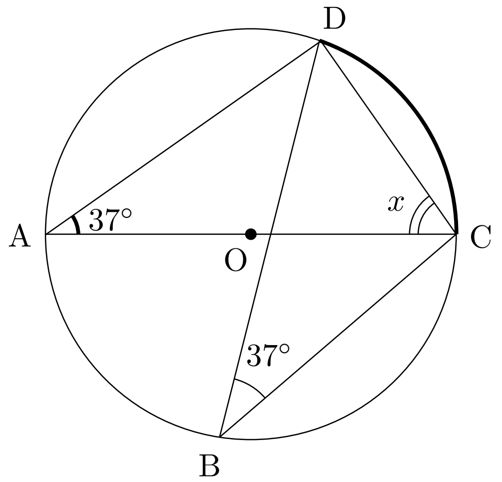
e.g.

次の図の $\angle x$ の大きさを求めよ．ただし，O は円の中心とする．

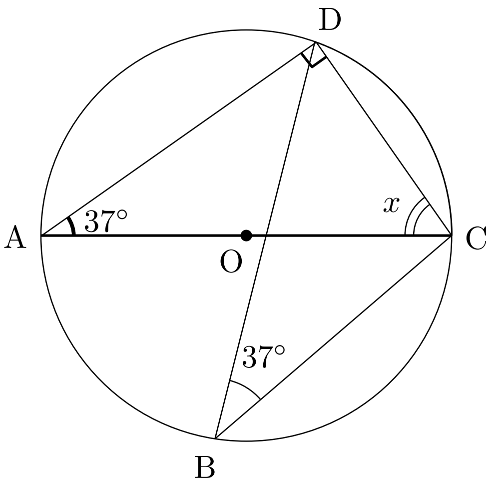


この手の問題を見たときには，**どの弧に着目するか**ですべての勝負が決まるといっても良いだろう．「どの弧に着目すれば，いかに角度の情報を多く引き出すことができるか？」これを的確に判断できるようになるには，とにかく場数を踏みまくるしかない．問題の図を見た瞬間に**「着目すべき弧が見えるようになる」**のが目標だ．

(1) この問題では，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に着目しよう．$\angle\mathrm{DAC}$ と $\angle\mathrm{CBD}$ が弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角だと分かる．同じ弧に対する円周角は等しいので，$\underbrace{\angle\mathrm{DAC} = 37^\circ}_{\text{すぐ図に書き込む!!}}$ である．



さらに，辺 AC は**直径**である．直径の円周角は 90° なので，$\underbrace{\angle\mathrm{ADC} = 90^\circ}_{\text{図に書き込む}}$.



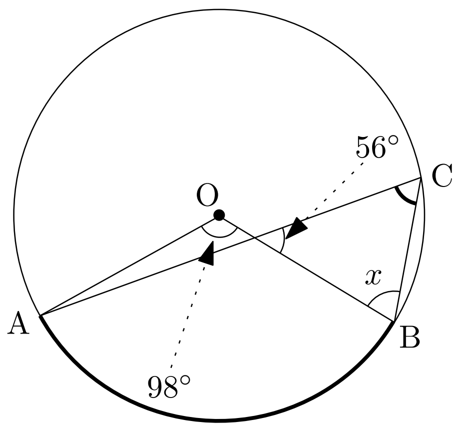
すると，直角三角形 △ADC が見えてくる．三角形の内角の和は 180° なので，

$$x = 180^\circ - (90^\circ + \angle \mathrm{DAC}) = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ.$$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に着目しよう．$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対して，

- $\angle \mathrm{AOB}$ は**中心角**
- $\angle \mathrm{ACB}$ は**円周角**

になっている．



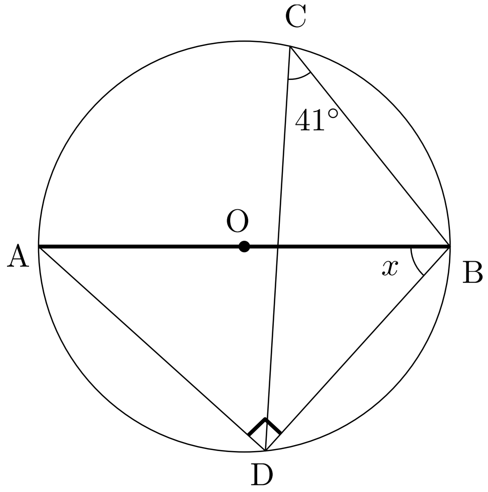
円周角の定理**「円周角は中心角の半分」**より．

$$\angle \mathrm{ACB} = \frac{98^\circ}{2} = 49^\circ.$$

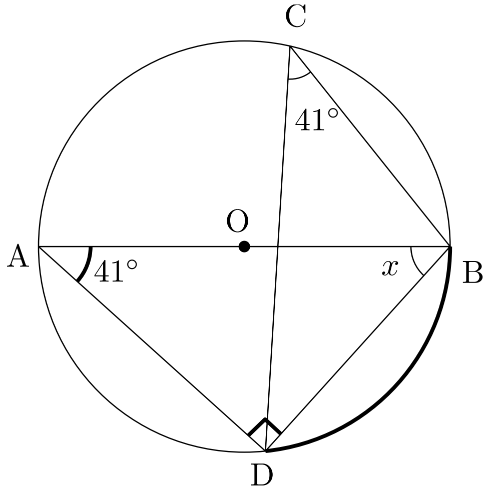
あとは，右側のちっちゃい三角形について，内角の和は 180° なので，

$$x = 180^\circ - (56^\circ + 49^\circ) = 75^\circ.$$

(3) 辺 AB は円の直径である．直径といえば**「円周角が 90°」**なので，$\underbrace{\angle \mathrm{ADB} = 90^\circ}_{\text{図にすぐ書き込む!!}}$.



$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ に着目しよう．∠BAD と ∠DCB は $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ に対する円周角なので，∠BAD= 41°.

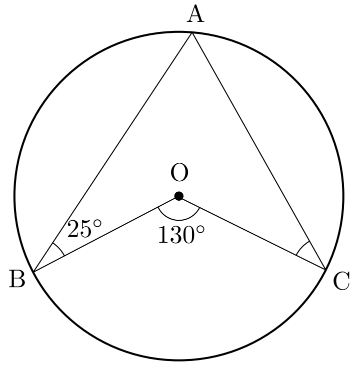


すると，△BAD が見えてくる．三角形の内角の和は 180° なので，

$$x = 180^\circ - (41^\circ + 90^\circ) = 49^\circ.$$

e.g.

下図で，点 O は円の中心である．∠BOC= 130°，∠ABO ＝ 25° のとき，∠ACO の大きさを求めよ．

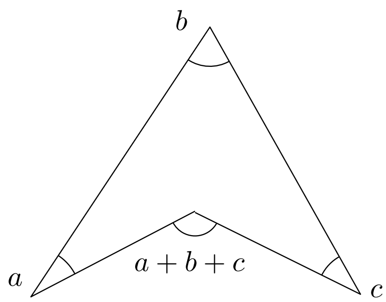


まず，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に注目すると，∠BOC が中心角，∠BAC が円周角になっている．円周角は中心角の半分なので，

$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ.$$

次の「裏技的公式」は，かなり出現頻度が高いので，いつでも思い出して使えるようになっておくと良い．

「ブーメランの公式」



これを使うと，

$$25^\circ + 65^\circ + \angle\mathrm{ACO} = 130^\circ.$$

∠ACO について解くと，∠ACO$= 130^\circ - 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ$.

e.g.

下図の A,B,C,D は円 O の周上の点で，線分 AC は円の中心 O を通っている．また，線分 AC，BD の交点を E とする．$\angle$AED$= 66°$, AB=BC のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい．