高専入学前のスタートダッシュ！
〜物理が苦手にならないために〜

北山慎之介

2020 年 3 月 6 日

第 1 章

速さ

1.1 速さの求め方

音は空気中に漂う分子が揺れ動いて遠くへと伝わって行く現象です。その音が伝わる速さをご存知でしょうか。約 340m/s です。他にも例えば、新幹線の速さはおおよそ 89m/s となっています。この m/s の意味は「1 秒 (second) あたりに何メートル (meter) 進むかを表した単位」です。他にも km/h もよく見かけますが、h は英語の hour（時間）の頭文字を取ったものなので、「1 時間 (hour) あたりに何キロメートル (kilometer) 進むかを表した単位」です。このような量を速さと私たちは呼びます。共通点は「ある時間あたりにどれくらいの距離進むのか」というものが速さとなっていることが分かると思います。

まとめ〜速さの定義〜

ある（単位）時間（例えば 1 秒だったり、1 時間だったり）の間にどれくらいの距離進むのかを表した量

さて、それでは移動した距離と要した時間がわかっているときは、どのようにして速さを調べることができるでしょうか。例として東京〜仙台間 350km を 2 時間で走る新幹線やまびこの速さを求めてみましょう。速さの意味は、「ある単位時間あたりに」ということがポイントでしたから、今回は「1 時間あたりに」と直すことになります。したがって、$350 \div 2 = 175$ をすることで、1 時間あたりに 175km 走るということが分かりますね。これを単位付きで表せば、175km/h となります。したがって、要した時間で移動した距離を割れば速さなるものが計算できることがわかるでしょう。

まとめ〜速さの求め方〜

速さ v(velocity) は、要した時間 t(time) とし、移動した距離を x とすると、

$$v = \frac{x}{t}$$

とまとめられます。速さの単位は、x[m] かつ t[s] のときは、m/s となります。また、x[km] かつ t[h] のときは、km/h となります。したがって、速さの単位は距離と時間の単位によって変化します。

練習問題 1

1. ある車が、360m 走るのに 30 秒要したという。この車の速さはいくらか。単位もつけて答えなさい。

2. 72km/h を m/s に単位変換しなさい。
3. 15m/s を km/h に単位変換しなさい。

1.2　等速直線運動

いきなりですが、等速直線運動の言葉の定義をします。

等速直線運動の定義

一直線上を一定の速さで進むような運動を等速直線運動という。

さて、この運動はかなり仮想的というか、実際日常的に見ることは少ない運動です。例えばボールか何かを厳密にまっすぐ転がしたとしても、いつか摩擦という現象によって止まってしまいます。これは「一定の速さで進む」という言葉の部分に合いません。一定の速さで進むということは、例えば速さ 10m/s でずっと一定というような状況です。1 秒たてば $x = 10\mathrm{m}$ 進み、2 秒たてば $x = 20\mathrm{m}$ 進みますから、一般に時間 t 秒たてば $x = 10t\mathrm{m}$ 進むことになるでしょう。10m/s というのは具体的な数値でしたから、これをもう一度 v[m/s] という文字に直せば、$x = vt$ という式を得ます。

等速直線運動の公式

v[m/s] の速さで等速直線運動をする物体が t[s] の間に進んだ距離を x[m] とすると、

$$x = vt$$

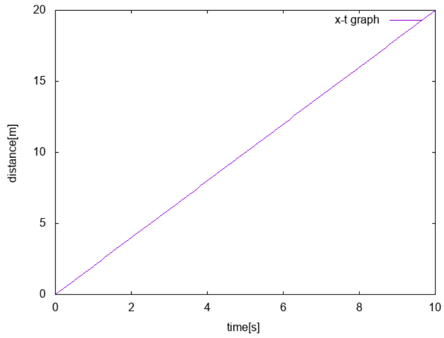
となる。

練習問題 2

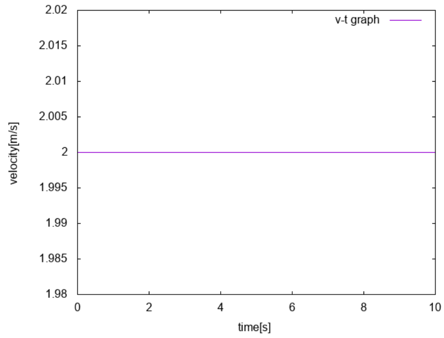
エレベーターが一定の速さ 2.0m/s で上昇中のとき、15s の間に上昇する距離は何 m となるか。

1.3　等速直線運動のグラフ

前ページで等速直線運動の公式は $x = vt$ という風に学んだ。これは、$x \to y$, $v \to a$, $t \to x$ とすれば、$y = ax$ となる。これは見たことのある式ではないだろうか？そう、これは原点を通る変化の割合が a となっている直線の方程式でしたね。したがって、文字は違えど $x = vt$ についても同様のグラフが描けるはずです。横軸を t 軸、縦軸を x 軸として直線 $x = vt$ を $v = 2$[m/s] の場合に描いてみると下図の左のものになる。それに対して、縦軸を v 軸として速さと時間の関係性をグラフにすると下図の右のものになる。



$x = 2t$



$v = 2$

練習問題 3

図 1.1 のような $x - t$ グラフがある。これは一直線上を運動する物体の、移動距離 x[m] と時間 t[s] の関係性をグラフにしたものです。この運動の速さを答えなさい。

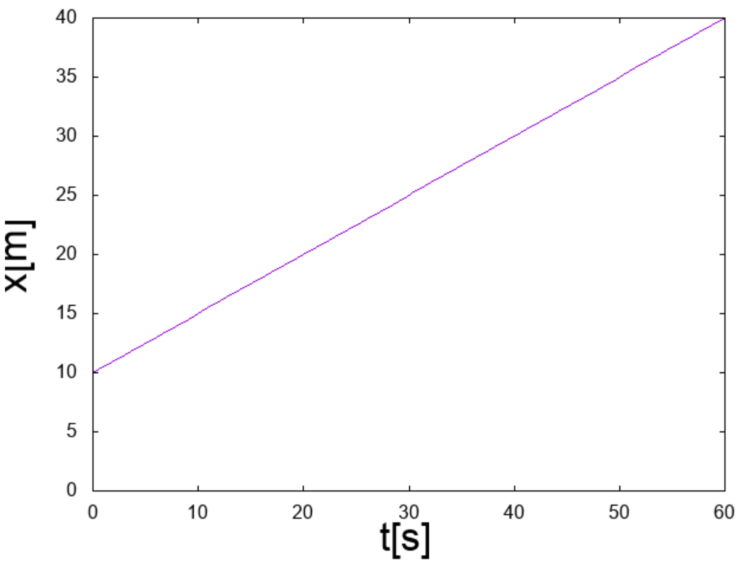


図 1.1　練習問題 3

第 2 章

速度

2.1 速度と速さって違うの？

速さとは今までの講義でやってきたような 10km/h のような値のみの情報を持つものだ（量の情報をスカラーという）。それに対して、速度というのは速さがどちらの方向に向いているのかを合わせた概念である（量と向きを合わせた情報をベクトルという）。

例

車が 50km/h で走っている。それと同時に、対向車線において車が 50km/h で走ってきている。このとき、私たちは「二つの車の速さは等しい」というが、「二つの車の速度は等しくない」ということになる。なぜならば、二つの車の動いている向きは同じではないからである。このとき、いちいち言葉で説明するのも面倒なので、片方の車が進む向きを「正の方向」と定めれば、対向車線は逆方向に進んでいるために「負の方向」に速度を持つという向きの意味を込めることができて便利である。この場合、前者の車の速度は 50km/h と表現し、後者の車の速度は (-50)km/h と表現することになる。この場合、速さが同じだが向きが逆方向となっていることが一目瞭然である。

練習問題 4

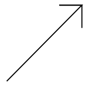
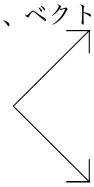
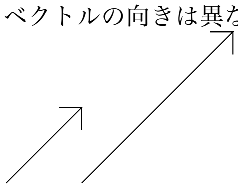
車 A は北向きに 12m/s で走っており、車 B は南向きに 15m/s で走っている。北向きを正の方向と決めるとすれば、車 A・B のそれぞれの速度 v_A, v_B はいくらとなるか。

まとめ〜速さと速度の違い〜

速さとはスカラーである。量の情報を持つ。
速度とはベクトルである。量と向きの情報を持つ。

2.2 ベクトルとは何か

前節で簡単にベクトルという言葉を用いたが、この節ではそれにもっと慣れ親しんでもらおう。明松先生の講座の方でもベクトルは出てくると思うので、合わせて勉強になると思う。

さて、前節にも書いたように、ベクトルとは量と向きを合わせもつ数学的な概念である。これを紙面上では矢印で表現する。矢印の始まりの点を「始点」といい、矢印の先となる点を「終点[*1]」という。そしてしばしば始点 O・終点 A などと点の名前をつけ、このベクトルのことを $\vec{OA}$（読み方：ベクトル OA）などと呼んだりする。何度も $\vec{OA}$ と書くのが面倒になるから、$\vec{OA} = \vec{a}$ などと特別に名前を決めて $\vec{a}$ と書くことも多い。また、ベクトルは量と向きを合わせ持つ概念であるから、この矢印の作図にその意味が込められていないといけない。そこで、ベクトルの矢印の向きを「ベクトルの方向」と決め（これは非常に自然だと思う）、ベクトルの長さを「ベクトルの量」と関連づけることにした。たとえば次の図のように、2 つのベクトルの長さは等しいので「ベクトルの量」としては等しいが、ベクトルの向きは異なるから「ベクトルの向き」としては等しくない。また次の図では、2 つのベクトルの長さは等しくないので「ベクトルの量」としては等しくないが、ベクトルの向きは同じであるから「ベクトルの向き」としては等しい。そうすると、あるベクトルとあるベクトルが「等しい」というのは「ベクトルの量も向きも等しい」こととルールを決めるのが自然である。

まとめ〜ベクトルとは〜

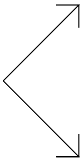
ベクトルとは、向きと量をもつ概念であり、紙面上に矢印で書く。2 つのベクトルが等しいとは、「ベクトルの向き」と「ベクトルの量（大きさ or 長さ）」が共に等しいこととする。
ただし、「ベクトルの向き」は紙面上の矢印の向きで表現し、「ベクトルの量」は紙面上の矢印の長さで表現することと約束する。

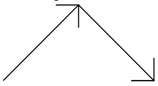
2.3　ベクトルの足し算とは

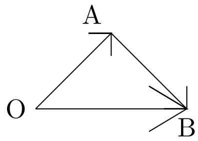
ここまでベクトルがどういうものなのか導入してきた。これではただの矢印を描くお遊びになってしまうので、もう少し面白いことができるようにルールを決めよう[*2]。私たちは小学生の頃からずっと足し算を絶えず使ってきたと思う。これをベクトルに対しても「足し算」なるものができるようにしてみたい。どうしたら良いだろうか。

*1 スマブラの最終ステージにも終点というところがある

*2 サッカーをやるにも、ボールがあるだけでは始まらない。ボールをどう扱うかのルールを決めることで面白くなる。ここでもベクトルというものを決めただけでは何も始まらない。ベクトルを使って何ができるかを決めることで面白くなる。

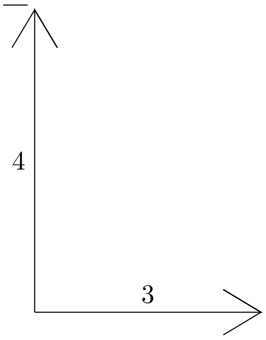
の２つのベクトルを足し算するとしよう。ベクトルは、「向きと量が同じ」であれば同一のベクトルと見なせるわけだから、次の図のようにして平行移動しても同じベクトルだ。

始点からぴょんぴょんと移動していくように、この２つのベクトルの和を、



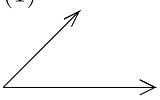
図の $\overrightarrow{OB}$ と定義する。すなわち、矢印をどんどん辿っていくような作図のことを「ベクトルの和」とするのだ。

例：次の図に描かれた２つのベクトルの和を作図し、そのベクトルの大きさを求めよ。

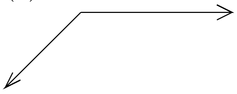


練習問題５：図に描かれた２つのベクトルの和を作図せよ。(3), (4) については作図したベクトルの長さも求めよ。

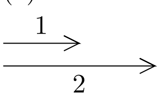
(1)



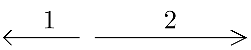
(2)



(3)



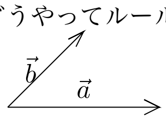
(4)



まとめ～ベクトルの和について～

$\vec{a}+\vec{b}$ とは、ある位置から $\vec{a}$ の方向に移動し、移動した先からさらに $\vec{b}$ の方向へと移動することを意味する。ぴょんぴょん飛びである。

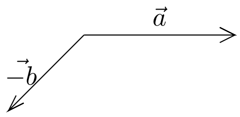
2.3.1　ベクトルの引き算とは

ここまででベクトル同士の足し算というものには親しんできたと思う。ここでは「ベクトルからベクトルを引く」ということについて考えたい。今まで和というのは「ぴょんぴょん跳び」によって決めていて直感的で分かりやすいが、差というのは全くもってイメージがしにくい。だが、ベクトルの足し算というルールで遊ぶ以上、やはり引き算というものが出てくるのは必然であろう。どうやってルールを決めるかが問題だ。次の図のようにして 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がある。

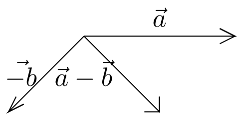
この 2 つのベクトルの差「$\vec{a}-\vec{b}$」は、$(-\vec{b})$ というベクトルを「$\vec{b}$ とは反対向きであるが、ベクトルの大きさは等しいベクトル」であるとルールを決め、

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

によって定義する。つまり、結局は差といいつつ、和なのである。したがって和をマスターしたみんなならできるはずだ。もう一度上の図に戻ると、$(-\vec{b})$ を作図すれば、



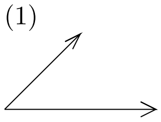
となる。この 2 つのベクトル ($\vec{a}$ と $(-\vec{b})$) との和を作図すると、



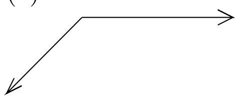
となる。

練習問題 6：2 つのベクトルの差 $(\vec{a}-\vec{b})$ を求めよ。(3), (4) については作図したベクトルの大きさも求めよ。

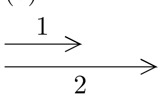
(1)



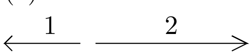
(2)



(3)



(4)



まとめ〜ベクトルの差について〜

$\vec{a}-\vec{b}$ は、$\vec{a}+(-\vec{b})$ として和で実際は考える。ここで $(-\vec{b})$ というのは $\vec{b}$ の逆向きとなるベクトルのことを表す。

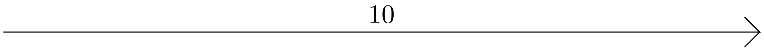
2.4　速度の合成 1

さて、ここまででベクトルの和・差についてはかなり学べたと思う。本題を数学から物理に戻すと、速度とは「向きがあり、大きさ（速さ）がある」量であった。これはまさしくベクトルの概念そのものではないか！したがって、速度というものを考えていくにベクトルというものは大活躍することになる。

例 1

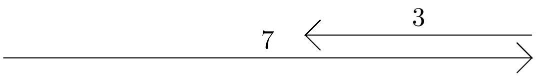
東に 7m/s で進む船があり、河の流れがどこでも東向きに 3m/s であったとしよう。この船を河岸から見ると、船の速さはどう見えるだろうか。直感的に $7+3=10$m/s ということが分かると思う。実はこれはベクトルでも考えることができる。

上は長さが 3 のベクトル、下は長さが 7 のベクトルである。この 2 つのベクトルの和は右向きで長さが 10 となるわけで、次の図となる。

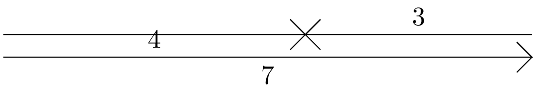


例 2

東に 7m/s で進む船があり、河の流れがどこでも西向きに 3m/s であったとしよう。この船を河岸から見ると、船の速さはどう見えるだろうか。直感的に $7-3=4$m/s ということが分かると思う。これもベクトルでも考えることができる。



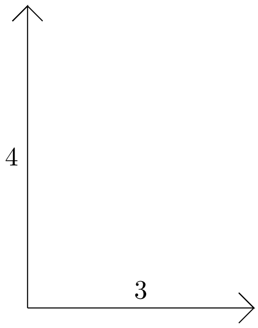
上は長さが 3 のベクトル、下は長さが 7 のベクトルである。この 2 つのベクトルの和は右向きで長さが 4 となるわけで、次の図となる。



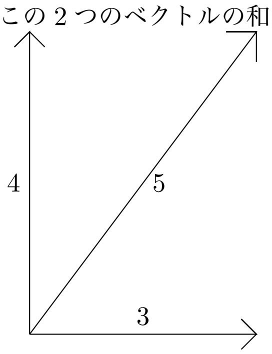
2.5　速度の合成 2

前節では速度の合成をベクトルによってどのように行うか学んだ。とはいえ、作図したのは一直線上（例えば東か西か）にあるベクトルであった。しかし実際に私たちが日頃見る「速度」というのは一直線上におさまるわけではない。たとえば前節の**例**において「東向きに走る船があり、東向きに河の流れがあるとする」という例を考えたが、この河の流れが北向きだったらどうだろう。

実はこの場合もベクトルの和がとても役に立つ。

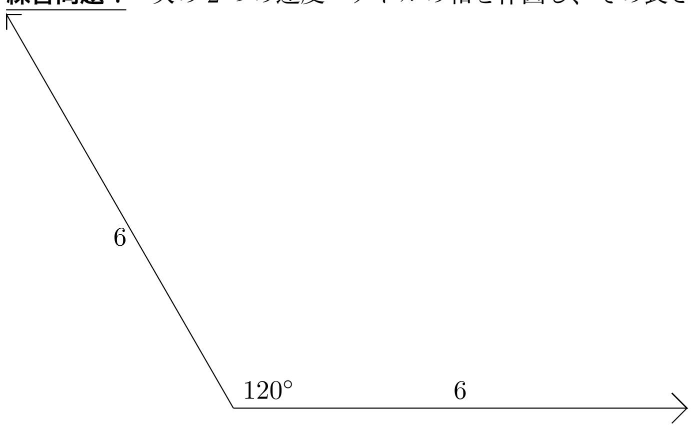


この 2 つのベクトルの和は、



となるのであった。実際、速度はこの足し算した結果のベクトルとなるのだ。ベクトルのところでもやったが、和の結果得られたベクトルの長さは、図における矢印のそのものの長さで考えるのであったから、三平方の定理により長さは 5 になる。ここでやってはいけないのは、北の方向に河の流れが 4m/s で、東向きに 3m/s であれば、足して 7m/s となるということである。あくまで上の作図による結果が正しい。注意すること。

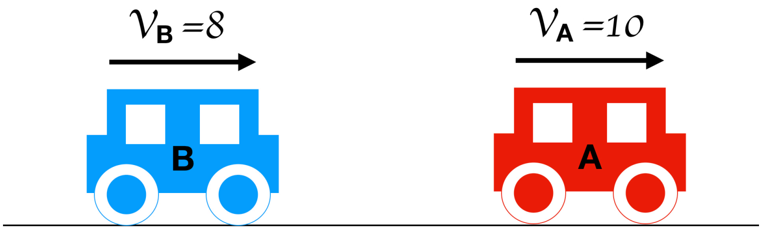
練習問題 7：次の 2 つの速度ベクトルの和を作図し、その長さを求めよ。



2.6　相対速度

下の図は異なる速度で一直線上を走る車の絵である。この図においては、右方向を正の向きと決める。

A から見ると、B は速さ 2m/s で遠ざかるように見える。これは、速度でいえば (-2)m/s を B が持つように見える。



それに対して、B から見ると、A は同様に速さ 2m/s で遠ざかるように見える。これは、速度で言えば (+2)m/s を A が持つように見える。
ここで、(−2)m/s のことを「A から見た B の相対速度」といい、v_{AB} としばしば書く。上における考察から、$v_{AB} = v_B - v_A$ と計算されることもわかるであろう。
同様にして、(+2)m/s のことを「B から見た A の相対速度」といい、v_{BA} としばしば書く。上における考察から、$v_{BA} = v_A - v_B$ と計算されることもわかるであろう。

練習問題 8：車が東西に作られた道路上を走っているとする。以下、「A から見た B の相対速度」を v_{AB} と書くことにする。(1) と (2) それぞれに対して、v_{AB} と v_{BA} を求めよ。
(1) A が東向きに 3m/s、B が東向きに 4m/s のとき。
(2) A が東向きに 3m/s、B が西向きに 4m/s のとき。

まとめ〜相対速度〜

A から見た（A に対して、ともいう）B の速度のことを、「A から見た B の相対速度」という。これを $\vec{v_{AB}}$ と書き、A と B の速度をそれぞれ $\vec{v_A}$, $\vec{v_B}$ とおくと、

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$$

とまとめることができる。

演習問題
(1)　速さ 1.0m/s は何 km/h か。また、54km/h は何 m/s か。

(2)　一定の速さ 5.0m/s で直線上を走るとき、0.9s 間に進む距離は何 m か。

(3)　静水の場合に速さ 5.0m/s で進む船が、速さ 1.0m/s で流れる川を下流から上流に向かって進んでいる。岸から見た船の速度はいくらか。

(4)　直線上を麦向きに速さ 1.0m/s で歩いている A 君から、左向きに速さ 5.0m/s で走っている B 君を見たときの相対速度を求めよ。

(5)　流れの速さ 2.5m/s の川がある。各問に答えよ。

1.　静水に対する速さ 3.5m/s のボート A が、船首を下流に向けて河を進むとき、岸から見た A の速度を求めよ。

2.　ボート A からボート B を見ると、上流に 4.5m/s の速度で進んでいるように見えた。岸から見た B の速度を求めよ。

(6)　南向きに速さ 20m/s で進む電車の中に、A 君が座っている。A 君から見ると、線路に沿って走る自動車の中の B 君は、北向きに速さ 15m/s で進んでいるように見えた。地面に対する B 君の速度を求めよ。

第 3 章

加速度

3.1 加速度とは

人・車・新幹線の速さを考えたとき、当たり前だがこの順番に速くなっていく。では、ヨーイドン！！でみんなが一斉に走り始めたら、誰が最初一番速いだろうか。実は、人である。こうして、物体の運動を調べたければ、ある時間内にどれくらい速さが増えるのかということを調べるのも重要になってくることがわかると思う。ここで、加速度なるものを定義する。

加速度の定義

1 秒間に速度がどれくらい変化したかを加速度（普通 a とかく）という。ある時刻 t_1 での速度が v_1 で、その後時刻 t_2 での速度が v_2 のときであれば、「速度がどれくらい変化した」というのは $v_2 - v_1$ と書け、その間に経過した時間は $t_2 - t_1$ であるから、

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

と求めることができる。単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

練習問題 9：次の各場合について、物体の加速度を求めよ。ただし、加速の仕方は一様としてよい。

(1) 一直線上を正の向きに 4.0m/s の速さで進む物体が、2.0s 後に正の向きに 7.0m/s となったとき。

(2) 一直線上を正の向きに 4.0m/s の速さで進む物体が、3.0s 後に負の向きに 2.0m/s となったとき。

3.2 等加速度直線運動

等加速度直線運動とは

速度の増減、すなわち、加速度が一定の運動を等加速度直線運動という。

これはイメージがしにくい運動だ。速度のところで似た名前として「等速直線運動」を学んだが、これは速度が一定のため、私たちが目に見て運動の状態を把握しやすい（だって見ればずっと同じような速度で運動しているのが丸見えだから）。一方で、「速度が一定の割合で増加したり減少したりする」という現象は見て完全には判断がつかないので難しい。本来であれば実験をすべきであろうが、今では YouTube などでも動画が観れるであろうから、進んで見ることをお勧めしておく。具体例としては、斜面上をコロコロと転がり落ちていく球の運動の様子は「等加速度直線運動」である。

速度と時間のグラフ：$v-t$ グラフを描く余白

$v-t$ グラフから移動距離を求める方法

したがって、次のようにして公式としてまとめることができる。

等加速度直線運動に関する公式

初速度を v_0[m/s]、加速度を a[m/s^2] とすると、ある時刻 t[s] における速度 v[m/s] と移動距離 x[m] は、

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

練習問題 10

速さ 1.0m/s で動いていた物体が一定の加速度 1.5m/s^2 で速さを増した。

(1)　2.0 秒後の物体の速さは何 m/s か。

(2)　2.0 秒後までに物体が進んだ距離は何 m か。

練習問題 11

4.0m/s の速さで動いていた物体が、一定の加速度 2.5m/s^2 で速さを増し、6.0m/s の速さになった。この間に物体が進んだ距離は何 m か。

練習問題 12

速さ 10.0m/s で進んでいた自動車が一定の加速度で速さを増し、3.0 秒後に 16.0m/s の速さになった。

(1)　このときの加速度の大きさを求めよ。

(2)　自動車が加速している間に進んだ距離を求めよ。

(3)　こののと自動車が急ブレーキをかけて、一定の加速度で減速し、40m 進んで停止した。このときの加速度の向きと大きさを求めよ。

演習問題

(1)　直線上を右向きに速さ 10m/s で進んでいた物体が、一定の加速度の運動を初めて、

5.0s 後に左向きに速さ 20m/s となった。この間の加速度を求めよ。

(2) 物体が x 軸上を初速度 1.0m/s、一定の加速度 0.50m/s^2 で 2.0s 間運動すると、速度はいくらになるか。また、この間の変位はいくらか。

(3) 物体が x 軸上を初速度 1.0m/s、一定の加速度 -0.50m/s^2 で 6.0s 間運動すると、速度はいくらになるか。また、この間の変位はいくらか。

(4) 物体が x 軸上を初速度 2.0m/s、一定の加速度 0.50m/s^2 で 6.0s 間運動して、その速度が 3.0m/s となった。この間の変位はいくらか。

(5) 物体が直線上を点 A から D まで運動した。速度はこの間常に正であったとする。始め、1 分 40 秒かけて等加速度運動をし速度が 30m/s となり点 B に着いた。その後 1 分 20 秒間は同じ速度を維持し C に着き、最後に 2 分間等加速度運動をし速度が 0m/s となったときにちょうど点 D に着いた。次の値を求めよ。
1. AB 間の加速度と CD 間の加速度

2. AD 間の距離

(6) 物体が x 軸上で等加速度直線運動をしている。物体が原点を通過する時刻を $t = 0$ とし、そのときの速度は 10m/s であった。また、時刻 $t = 6.0$s における速度は、-20m/s であった。各問に答えよ。
1. 物体の加速度を求めよ。

2. 速度が正の向きから負の向きに変わるときの時刻を求めよ。

3. 速度が正の向きから負の向きに変わるときの位置を求めよ。

第 4 章

力

4.1 力の定義

力とはなんだろうか。これは簡単なようで実は物理学的には難しい問いかけである。先に力とは何なのか、定義する。これは非常に重要な視点である。これを頭に常に置くか置かないかで今後の物理の理解に絵教を及ぼすと言っても過言では無い。

力の定性的な定義

物体の速度を変えることができる原因を力と呼ぶ。単位は N（ニュートン）である。
また、力は必ず「誰が」「誰に」及ぼすかという視点で考えることができる。

これだけである。あなたがみたものの運動を観察し、速度が変わっていたら？そこには、力があるということだ。常に、力を「速度を変化させるもの」という認識で捉えておくと今後役立つ。
ここで先に注意しておきたいのが、ものは落下しようとするのではない。現代の物理学では、万有引力という力があり、地球と物体が引き合うことでものが地球表面上に落下することを知っている。だから、この場合は「地球が」「物体に」万有引力という力を及ぼす。というように、力が誰から誰に及んでいるのかを明確にするところが大事だ。

4.2 いろいろな力

重力

「地球が」「物体を引く力」を重力と呼ぶ[*1]。この力の大きさは地球表面上では物体の「質量 [kg]」というものにおおよそ比例していることが知られている。質量を $m[kg]$ とすると、その比例定数を $g[\mathrm{m/s^2}]$ とし、力 $F = mg$ と書ける。$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ である。

練習問題 13

質量 10kg の物体に働く重力の大きさはいくらか。

[*1] 実際には質量を持つあらゆる 2 物体の間には引力が働くことが知られていて、それは万有引力と呼ばれる。今回は質量を持つ地球と地上の物体の間の万有引力を「重力」と略しているに過ぎない

弾性力

ばねに物体をつなげて引っ張りもせず、縮めもしない安定した位置に置くのであれば、物体は動かない。この位置におけるばねの長さを「自然長」という。ばねの自然長から引き延ばすと、物体を元に戻すような力が働く。対して、ばねの自然長から押し縮めると、物体を元に戻るような力が働く。すなわち、ばねというものは自然長に戻すように力を及ぼすということだ。それゆえ復元力とも呼ばれる。もしくは弾性力ともいう。この弾性力の大きさに関してフックの法則というものが知られている。

フックの法則

ばねの自然長から x[m] だけ縮むか延びたとき、物体を引き戻す方向に x[m] に比例した力が働く。その比例定数を k とおけば、$F = kx$ とかける。式から、k の単位は N/m となる。k はばね定数という。

練習問題 14

ばねを手で弾いて 0.20m 伸ばしたところ、手はばねから 4.0N の大きさの力を受けた。ばね定数はいくらか。

張力

糸をつないで物体を吊るしたとき、糸は物体の重力に逆らうように上方向に引っ張る。この力を張力と呼ぶ。

面から受ける力

通常空中ならば重力が物体に働いて地面に落下していくにも関わらず、机の上に置いたときには静止する。すなわち、上の方向に押し返すような力が机から及んでいると考えることができる。この「面から物体に及ぶ、面に垂直な方向に対して働く力」を垂直抗力という。

一方で、物体を地面上で転がすと物体はいつか静止する。これは、進行方向と逆方向に何かしらの力が及んでいることを示していると考えられる。この「面から物体に及ぶ、面に平行な方向に対して働く力」を摩擦力という。特に、物体が運動している最中に物体に働く摩擦力のことを「動摩擦力」といい、トラックを人間が押しても動かないときにトラックに対して地面から及ぶ摩擦力を「静止摩擦力」という。

第 5 章

力のつりあい

物体を机の上に置いたとき、物体は動かない（ふつう）。このときどんな力が働くかは前章で学んだ。まずは、物体が地球上にある以上は地球から物体を引く力（重力）がある。また、接触した面から働く垂直抗力がある。力のつりあいとは、物体が完全に静止しているときには必ず及んでいる力が（ベクトルの和という意味で）打ち消しあうことをいう。

力のつりあいの意味

物体が完全に静止しているならば、物体に働いている力（ベクトル）の和は 0 ベクトルになる。

練習問題 15

質量 10kg の物体を机に置いたとき、この物体に働く垂直抗力はいくらか。向きも答えよ。ただし、重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ である。

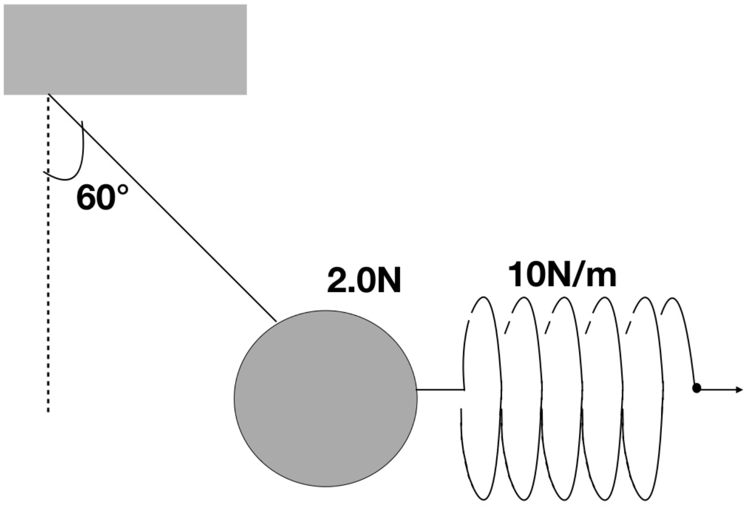
演習問題

(1) 質量 5.0kg の物体の重さは何 N か。

(2) 重さ 10N のおもりをつるすと、0.10m 伸びるばねがある。ばね定数は何 N/m か。

(3) 3.0N の力と 4.0N の力が同じ向きにはたらくとき、合力の大きさはいくらか。また、逆向きにはたらくとき、直角にはたらくときではそれぞれいくらか。

(4) 物体に水平から 30° 上向きに 20N の力を加える。面に沿った方向の力の成分はいくらか。



(5) （上図参照）軽い糸の一端を天井につけ、他端に重さ 2.0N の小球をつなぐ。この小球に、ばね定数 10N/m の軽いばねの一端を取り付け、他端を水平方向に静かに弾いた。意図が鉛直方向と 60° の角をなして小球が静止しているとき、ばねの自然の長さからの伸びは何 m か。

(6) 質量 1.0kg のおもりを天井から糸でつるして静止させた。このとき、おもりが受ける糸の張力の大きさはいくらか。

(7) 自然長 0.200m のばねに、40N の力を加えて伸ばすと、長さが 0.240m になった。各問に答えよ。

1. ばねのばね定数を求めよ。

2. ばねに質量 5.0kg の物体をつるすと、ばねの長さはいくらになるか。

第 6 章

落下運動

　ここまでを理解している諸君であれば、ここは難なく通過できると思う。わからない人も、演習を通して理解に努めればぜったいにできるはずだ。頑張ろう。

板書メモ

例

(1)　小球を自由落下させた。1.0s 後の速さと落下距離を求めよ。

(2)　小球を速さ 10m/s で鉛直下向きに投げ下ろした。2.0s あとの速さと落下距離を求めよ。

(3)　小球を鉛直上向きに速さ 9.8m/s で投げ上げたとき、最高点に達するのは何 s 後か。

演習問題

(1)　橋の上から小球を静かに落としたところ、2.0s 後に水面に達した。

1.　水面から橋までの高さはいくらか。

2.　水面に達する直前の速さはいくらか。

3.　橋の高さの中央を通過するときの速さはいくらか。

(2)　ある高さのビルの屋上から、鉛直上向きに速さ 9.8m/s で小球を投げ上げたところ、3.0s あとに地面に達した。

1.　小球を投げ上げてから最高点に達するまでの時間と、屋上から最高点までの高さを求めよ。

2.　小球が地面に達する直前の速さを求めよ。

3.　地面からのビルの高さを求めよ。

(3)　ビルの屋上から小球を静かに落としたところ、4.0s 後に地面に達した。ビルの高さはいくらか。

(4)　高さ 44.1m のビルの屋上から小球を自由落下させた。地面に達するまでの時間と、地面に達する直前の小球の速さを求めよ。

(5)　高さ 19.6m のビルの屋上から、小球を静かに落下させた。このとき、地面に達する直前の小球の速さはいくらか。

(6)　高さ 39.2m のビルの屋上から、小球を初速度 9.8m/s で鉛直下向きに投げ下ろした。

1.　小球が地面に達するのは何 s 後か。

2.　小球が地面に達する直前の速さを求めよ。

3.　小球がビルの中央を通過するときの速さを求めよ。

(7) (難問) 地面から鉛直上向きに速さ v_0 で小球を投げ上げた。地上からの高さ hm の点を通過するとき、小球の速さはいくらか。

(8) 地面から速さ 19.6m/s で鉛直上向きに小球を投げ上げた。

1. 地上 14.7m の点を小球を通り過ぎるのは何 s 後か。
2. 小球が最高点に達するまでの時間は何 s か。
3. 最高点の高さは何 m か。
4. 小球が再び地面に落ちてくるまでの時間と、そのときの速度をそれぞれ求めよ。

第 7 章

ニュートンの運動の三法則

ニュートンは物理学の歴史を大きく変えた人物である。主に天体に関する幾何学的な計算をすることでのちに「ニュートンの運動の三法則」と呼ばれる法則を見出した。(実際にはニュートンのした仕事を整理することでのちに最もシンプルな三法則にまとめられている) 非常に重要な法則で、物理学においてものの運動を考えるときは、必ずこの三法則から考える。すべて、である。

7.1 慣性の法則

慣性の法則

外部から力を受けないか、あるいは外部から受ける力がつりあっている場合には、静止している物体はいつまでも静止をし続け、運動している物体はいつまでも静止をし続け、運動している物体は等速直線運動をし続ける。

授業の前半で扱った「等速直線運動」という運動があった。これは基本的に見るのもあまりない[*1]。とはいえ、かなり等速直線運動に部分的に近い運動は見る。それはカーリングであろう。ストーンを支える選手が手を離してストーンが運動する。実際には別の選手がストーンの行く先をこすることで摩擦を増やし、最終的には静止してしまうので、これは等速直線運動ではない。(つまり、結局地上でこの運動を見るのは難しい) ただ、ここで飛躍的に思考して、我々が見ている状況は「力が働いていることで、静止したりしてしまう」と考えれば、「力が働いていなければ、静止する」と仮想的に考えたのであろう。ただ、我々がある速度を物体に与えて、その物体がそのまま「力を受けない」という状況が続けば、「静止する」というのはいつも見ている状況と同じだから、「最初に速度があるときは、力が働いていなければ、静止はせず等速直線運動する」と考える。こうして、上の枠にまとめた内容になる。

[*1] というより、原理的にほぼ現実で見ることはない。本格的な実験で理想的な状況を作れれば見ることはできるかもしれない？

7.2　運動方程式

運動方程式

質量 m[kg] の物体に力 F[N] がはたらくとき、その物体に生じる加速度 a[m/s^2] との関係性は $ma = F$ となる。力が働けば、加速度が生じるという意味を持つ式である。

これが物体の運動の根源を担う方程式であるが、これをただの方程式とは捉えて欲しくはない。上のまとめにも書いたが、原因と結果を表す式である。物体が加速したという結果を見たとき、物理の人たちは原因として力が何かしら働いている考えることになる。こんな風にも考えられる。同じ大きさの力を質量の違う物質に加えたとき、質量が大きければ加速度が小さくなる。これは、質量が大きいと、加速がしにくいというような意味合いを持つ。

例

なめらかな水平面上に置いた質量 1.5kg の台車に、水平方向に一定の力を加え続けたところ、台車の加速度の大きさは 3.0m/s^2 となった。このとき加えた力の大きさは何 N か。

練習問題

質量 2.0kg の物体に、右向きに 5.0N の力を加え続ける。このときの物体の加速度の大きさ a[m/s^2] と向きを求めよ。

7.3　作用反作用の法則

作用反作用の法則

物体 A から物体 B に力をはたらかせると、物体 B から物体 A に同じ作用線上で、大きさが等しく、向きが反対の力が働く。

おしくらまんじゅうや、手で手を押し合って相手の足を動かすゲームを経験したことはないだろうか。これは作用反作用の法則の例である。相手を強く押すと、自分もその分押し返されてしまい、自分のバランスを崩すことにもつながってしまう。この力の大きさについて私たちはゲームの中で知る由はなかったと思うが、実は上の枠にまとめたようなことが成り立つと考えられている。つまり、自分が相手に与えた分と同じ力を、逆向きに自分に食らってしまうということだ。

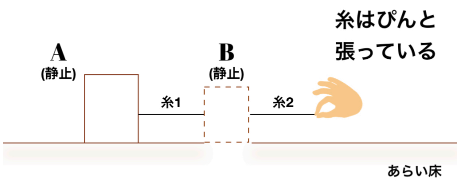
7.4　力の見つけ方

初学者が困るのが力の見つけ方である。これは慣れれば難しくない。以下の通りにすると必ず見つけられる。

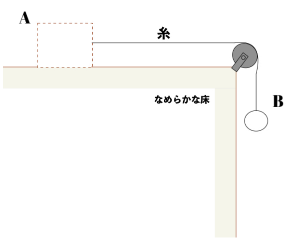
力の見つけ方

(1) 接触していなくても働く力（主に重力）を描きこむ。
(2) 接触している部分に働く力を描きこむ。
(3) 作用反作用を忘れずに描きこむ。

これを例を通しながら理解していこう。**例**
物体 A の上に物体 B を乗せた。この二物体に働くすべての力をかけ。さらに、力の名称等もかけ。
練習問題：それぞれについて、物体 A または B に働く力をかけ。ただし、ばねや糸の質量・空気抵抗は無視し、指定がないときは地面等はなめらかで摩擦が存在しないとせよ。
(1) ななめに空中に投げた物体 A
(2) 床においた物体 A の上にばねをとりつけ、上に引く（ただし物体 A はまだ持ち上がっていない）
(3) 天井に糸を垂らし、その糸の先端に物体 A を吊るす。
(4) (3) の物体 B の下にさらに糸をつけて垂らし、その糸の先端に物体 B を吊るす。
(5) 下図の状況



(6) 下図の状況



(7)　地面の水平面から傾いた面に対して物体 A を置いたとき。

(8)　(7) において地面があらい場合に、物体 A が静止していたとき。

(9)　(7) において地面があらい場合に、物体 A が動いていたとき。

(10)　(7) において地面があらい場合に、物体 A を下から指で押し上げながら運動させたとき。

(11)　材質が均一で太さが一様な棒をなめらかな壁にたてかけたとき。ただし、地面はあらい床となっていると考えよ。

7.5　重さと質量のちがい

重さ・質量

重さとは力の大きさのことであり、単位は $\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$ である。地球表面上では重さ＝質量 × 重力加速度 (=9.8）になる。
質量とは物体がもつ固有の値であり、単位は kg である。

というように、重さという言葉と質量という言葉は実は物理学においては意味が違う。体重計に表示される値は kg であるから、それを質量と我々は呼ぶ。だが実際は質量を直接測ることはできない。体重計は「重さ」すなわち「力」を測定し、それを重力加速度 (=9.8) で割っているのである。

練習問題

質量 5.0kg の物体の重さは、地球上では何 N か。また、月の上にこの物体を持っていくと、質量は何 kg であり、また、重さは何 N か。地球上における重力加速度 $9.8\mathrm{m/s^2}$ とし、月面上での重力加速度は $1.3\mathrm{m/s^2}$ とする。

7.6　運動方程式を立てる

さて、ここまでで様々な力学を学ぶ上での基礎はかなりついてきている。次は、力学の三原則である「慣性の法則」「運動方程式」「作用反作用の法則」をどう適用していくかを問題の中で考えていくのが物理学である。ひたすら問題を通しながらやっていこう。

7.6.1　摩擦なし

例

重力のみを受け、鉛直下向きに落下している小球を考える。小球の質量を 0.50kg、小球にはたらく重力の大きさを 4.9N とする。
(1)　小球の加速度を $a[\mathrm{m/s^2}]$ として、小球の運動方程式を立てよ。ただし鉛直下向きを正とする。
(2)　$a[\mathrm{m/s^2}]$ を求めよ。

例 2

質量 0.50kg の小球を吊るした軽い糸の上端を持って、6.0N の力で引き上げた。小球の加速度の大きさと向きを求めよ。

例 3

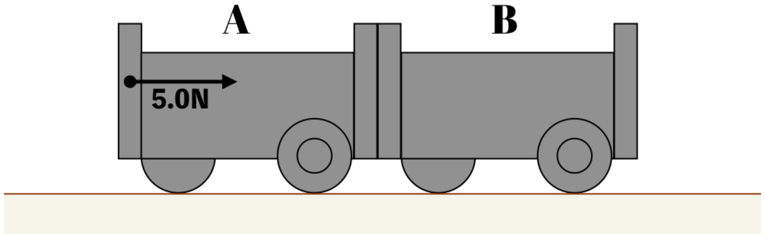
傾きの角が θ のなめらかな斜面上を、小物体がすべりおりている。このときの小物体の加速度の大きさを求めよ。

例 4

水平面上に質量 1.0kg の台車 A と質量 1.5kg の台車 B を接触させ、図のように A を 5.0N の力で水平に押す。床はなめらかとする。

(1)　A、B の加速度の大きさを求めよ。

(2)　A が B を押す力の大きさを求めよ。



例 5

質量 m[kg] の物体をなめらかで水平な机の面上に置く。物体に軽くて伸びないひもをつけ、これを机の端に固定した軽い滑車に通し、ひもの端に質量 M[]kg] のおもりをつるす。重力加速度の大きさは $g\mathrm{m/s^2}$ とせよ。

(1)　物体とおもりの加速度の大きさ $a[\mathrm{m/s^2}]$ を求めよ。

(2)　ひもが物体を引く力の大きさ T[N] の大きさを求めよ。

7.6.2 摩擦あり

静止摩擦力

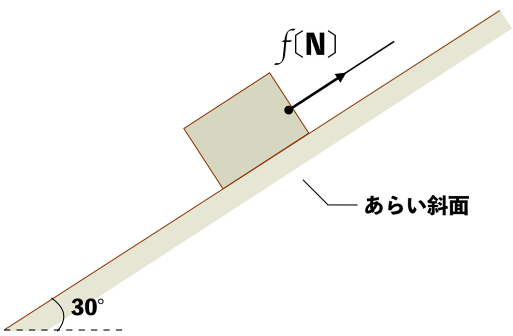
以前静止摩擦力と動摩擦力があるという話はした。具体的にそれがどのようにして定式化されているのかをここで学ぶ。

静止摩擦力

何らかの面に接した物体がある。この物体に力をかけ、面に対して水平に移動させようとすると、動かないことがある。これは面から摩擦力を受けているからで、この「物体が静止しているとき」に働いている摩擦力を静止摩擦力と呼ぶ。その静止摩擦力にも限界はあり、その限界の大きさ最大摩擦力は $R = \mu N$ と表されることが実験的に知られている。この N は面から物体に及ぼされている垂直抗力であり、μ は単位がない物理量で、静止摩擦係数と呼ばれる。

例

傾きの角が 30° のあらい斜面上にある質量 1.0kg の物体を、斜面に沿って上向きに軽い糸で引く。糸で引く力の 大きさ f[N] が次の (1) から (3) のように変化するとき、物体にはたらく静止摩擦力 F[N] の大きさと向きを答えよ。ただし物体はいずれの場合も静止していたとし、重力加速度の大きさは $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ とする。



(1) $f = 2.0\mathrm{N}$
(2) $f = 6.0\mathrm{N}$
(3) $f = 4.9\mathrm{N}$

動摩擦力

動摩擦力

何らかの面に接した物体がる。この物体に力をかけ、面に対して水平に移動させているとする。このとき面から物体に対して何かしら「運動を妨げる方向に」力働いており、これを動摩擦力という。動摩擦力に特徴的なのは、常に一定値であることと、最大摩擦力よりは小さいということだ。その大きさは $R = \mu' N$ と書かれる。この N は面から物体に及ぼされている垂直抗力であり、μ' は単位がない物理量で、動摩擦係数と呼ばれる。上の事実から、$\mu > \mu'$ である。

例

傾きの角 θ のあらい斜面上を物体がすべり降りるとき、物体に生じる加速度 $a[\mathrm{m/s^2}]$ を求めよ。重力加速度の大きさを $g[\mathrm{m/s^2}]$、斜面と物体との間の動摩擦係数を μ'、斜面にそって下向きを正とする。

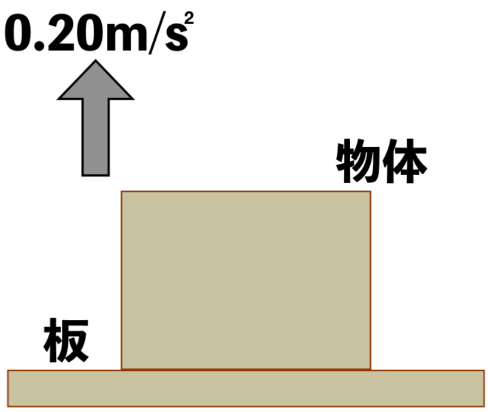
演習問題

(1)　小球を鉛直に投げ上げる。小球の質量を 2.0kg、小球にはたらく重力の大きさを 19.6N とし、空気の抵抗を考えないとする。

1.　小球の加速度を a[m/s^2] として、小球の運動方程式を立てよ。ただし、鉛直上向きを正とする。

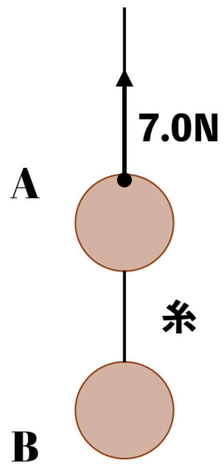
2.　a[m/s^2] を求めよ。

(2) 図のように質量 1.5kg の物体を板で支えながら、鉛直上向きに一定の加速度 0.20m/s^2 で移動させたとする。このとき、板から物体に加わる力の大きさ F[N] を求めよ。ただし重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。



(3)　傾きの角が θ のなめらかな斜面上にある小物体（質量 m[kg]）を、斜面方向上向きに F[N] の力で引き上げる。このときの小物体の加速度の大きさ a[m/s^2] を求めよ。重力加速度の大きさを g[m/s^2] とする。

(4)　図のように、質量が 0.20kg と 0.30kg の小球 A,B を軽い糸でつなぎ、A を大きさ 7.0N の力で鉛直上向きに引き上げた。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。



1.　A,B の加速度の大きさ $a[\mathrm{m/s^2}]$ を求めよ。
2.　糸が B を引く力の大きさ $T[\mathrm{N}]$ を求めよ。

(5)　軽い定滑車に軽い糸をかけ、その両端に質量がそれぞれ $m_1, m_2[\mathrm{kg}](m_1 > m_2)$ のおもり A,B をつけて静かに手を離す。重力加速度の大きさを $9.8\mathrm{m/s^2}$ とする。
1.　おもりの加速度の大きさ $a[\mathrm{m/s^2}]$ を求めよ。
2.　糸がおもりを引く力の大きさ $T[\mathrm{N}]$ を求めよ。

(6)　傾きの角が $30°$ のあらい斜面上にある質量 0.50kg の物体を、斜面にそって上向きに軽い糸で引く。引く力 $f[\mathrm{N}]$ を大きくしていったとき、物体が動き始める直前の f の大きさを求めよ。物体と斜面の間の静止摩擦係数を $\frac{1}{\sqrt{3}}$、重力加速度の大きさを $g[\mathrm{m/s^2}]$ とする。

(7)　傾きの角 θ のあらい斜面上に、質量 $m[\mathrm{kg}]$ の物体を置く。物体に軽い糸をつけ、斜面に沿って上向きに大きさ $F[\mathrm{N}]$ の力で引いたところ、物体は斜面をすべり上がったとする。このとき、物体に生じる加速度 $a[\mathrm{m/s^2}]$ を求めよ。重力加速度の大きさを $g[\mathrm{m/s^2}]$、斜面と物体との動摩擦係数を μ'、斜面に沿って上向きを正とする。

第 8 章

圧力・浮力

8.1 圧力

日頃圧力という言葉はよく耳にすると思う。ただ、日常的な圧力はふつうの「力」という言葉と同等な認識で使われていると思う。物理学では厳密に異なる概念だ[*1]。定義を説明しよう。

圧力の定義

ある面に対して、単位体積あたりにかかる力の大きさを圧力という。いま、面積 $S[\mathrm{m}^2]$ の部分全体に力 $F[\mathrm{N}]$ がかかっているとすると、この面にかかる圧力 p は、

$$p[\mathrm{N/m}^2] = \frac{F}{S}$$

となる。

買い物を親から手伝わされ、重い荷物を運んだことはないだろうか。レジ袋にパンパンに入った重い荷物をそのまま直に手で持っているとだんだんひりひりしてくる。それはレジ袋の重さが手と接している非常に小さな面積で受けているからだ。これは圧力が非常に大きいと考えられる。これを避けるため、力をより広い面に分散させることができれば、手の痛みが軽減できるはずだ。どうすればいいだろうか？直感的に考えてほしい。私がよくやるのは、手袋をしてその上にレジ袋を持つ作戦だ。手袋をするだけで、受ける面が手袋全体とは言わずとも、より大きな面でレジ袋を支えることになり、手の痛みが軽減できる。みなさんが考えたアイデアはどんなものだったろうか？こうして、圧力というものを考えるのは価値があるように思われるわけである。

例

画びょうを指で板に垂直に押し付ける。画びょう上面の面積を $1.0 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$、下面（ピン）が板に接している面積を $2.0 \times 10^{-8}\mathrm{m}^2$、指が画びょう上面に及ぼす力を 20N とするとき、画びょうが指から受ける圧力 $p_1[\mathrm{Pa}]$ と、板が画びょうから受ける圧力 $p_2[\mathrm{Pa}]$ を求めよ。画びょうの質量は無視する。

[*1] 厳密には違うが、圧力は力を別の側面から見たものに過ぎないので、力であるといえば力ではある。

8.1.1 気体の圧力

圧力という言葉をよく見かけるのは大気圧（略して気圧）であろう。ニュースでもよく出てくる。これは何を意味しているのであろうか。まず、大気中には何らかの分子が浮遊している。それらは運動しており、私たちの身体にぶつかってくる。実はこの力こそが大気圧の原因である。だいたい地表上での大気圧は 10^5Pa 程度である[*2]。

8.1.2 液体の圧力

水による圧力を水圧という。私たちが耳抜きをせずに 5m 程度潜ってしまうと、鼓膜が潰れてしまうという。これは水圧によるものであり、非常に大きな力なことも推察ができる。一体どうして深く潜るとそんなことが起こってしまうのだろうか。実験的にわかっている事実を紹介しよう。

水圧についての事実

1. 同じ深さでは水圧はどの方向にも同じ大きさである。
2. 深くなるほど水圧は大きくなり、液体の密度 ρ[kg/m^3] の液面から h[m] のところにおける水圧 p は $p = \rho hg$ とかかれる。

$p = \rho hg$ の証明

よくよく考えると、空気も圧力を及ぼすため、実際に深さ h[m] における圧力 p は、大気圧を p_0 として $p = p_0 + \rho hg$ とかくことができる。

例

水深 10m における水圧は何 Pa か。水の密度を 1.0×10^3kg/m^3、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。

8.2 浮力

浮力も日頃感じる力である。お風呂に入っているときや、プールに入っているときなど、自分の体がいつもよりも軽いと感じると思う。言われてみるとこれは非常に不思議な

[*2] 実はこれは異常に大きい数値だということに気づいて欲しい...。

現象ではないだろうか。一体どうして起こるのであろうか。また、物理学的にはどう定式化されているのであろうか。

浮力について

物体が押しのけた液体（や気体）の重さ分だけ鉛直上向きに力を受ける。（アルキメデスの原理）
液体（や気体）の密度を $\rho[\mathrm{kg/m^3}]$ とし、物体が押しのけた液体（や気体）の体積を $V[\mathrm{m^3}]$ とするなら、受ける浮力の大きさは $\rho V g$ となる。
これは物体に働く圧力の差によって説明ができる。

$\rho V g$ の証明

例

体積が $5.0 \times 10^{-5}\mathrm{m^3}$ の小石の、水中における浮力の大きさは何 N か。

第 9 章

仕事と力学的エネルギー

9.1　仕事とエネルギーの定義

ものすごい速さで動く物体と、同じ物体がゆっくりと動く場合では、前者の方が「エネルギー？」なるものが大きい気がすると思う。ゆっくりと動く物体の方をもっともっと加速させてものすごい速さにするには、みなさんはどうするだろうか？おそらく、動いている方向に力を加えて速くなるように仕向けると思う。したがって、「エネルギー？」なるものは、物体が「動く方向に」力を加えることで増加する気がする。また逆に、ものすごい速さで動く物体を、動いている方向と逆方向に引っ張ってしまえば、次第に減速していくことも直感的にわかってもらえるだろう。したがって、「エネルギー？」なるものは、力の加え方によっては減らすこともできるというわけだ。そこで、「エネルギー？」を作るものとして「仕事[*1]」なる概念を定義する。

仕事の定義

物体が動く方向、または、それの逆方向に力を加えているとき、その力の大きさ F[N] と、移動した距離 x[m] の積を仕事 W[Nm] という。すなわち $W = Fx$ である。ここで、物体が動く方向に力を加えていた場合は正、物体が動く方向とは逆方向に力を加えているときは負の仕事とする。単位は [Nm] であるが、これをふつう [J]（ジュール）という。

これは先ほどの例であげたものに適用すれば、直感的に仕事というものが「エネルギー？」を生み出せるものだと理解できるであろう。さてここでエネルギーを定義する。

エネルギーの定義

仕事をすることができる能力をエネルギーと定義する。

？？？と思った人もいるかもしれない。私たちが物体を押したり引いたりすると「エネルギー？」というような感じのものが増えるのは実感できる。これは視点を変えると、「エネルギー？」なるものを持っていれば仕事が作り出せると理解ができる。なぜなら、勢いがものすごい物体を別の静止していた物体にぶつければ、その物体は加速して動き始めることはわかると思う。これは、先ほど私たちが考えた「手による」仕事を、「エネルギー？」をもつ物体が代わりにやったと考えることができないだろうか。こうして、エネ

[*1] ふつうのお仕事のことではない…

ルギーと仕事というものは表裏一体の関係であるから、逆に曖昧な「エネルギー？」という概念を、仕事を通じて定義してしまえ、ということなのである。仕事をする能力があれば、それをエネルギーと捉えるのだ。

例：次のものがエネルギーをもつか答えてみよ。

(1)　完全に静止した物体。

(2)　ボウリングで転がした球。

(3)　空中で離した球が地面につくとき。

(4)　ジェットコースターでてっぺんから落ちていき最下点にたどりついたとき。

例 2

(1)　物体に 2.0N の力を加え続けて、その力の向きに 6.0m 動かすとき、その力のした仕事は何 J か。

(2)　移動中の物体に 3.0N の力を進行方向と逆向きに加え続けて 3.0m 動かすとき、その力のした仕事は何 J か。

9.2　力が斜めにかかる場合の仕事

上の例では、物体が動く方向か、それかその逆方向に力を加えるケースしか扱わなかった。しかし、実際には物体に加える力がその方向だけとは限らない。斜めに力を加えた場合はどう考えるのか。これはとても単純である。

図のメモ

したがって、仕事についてはより一般的に次のように定義ができる。

仕事の定義 (より一般的*2)

加えた力の大きさを F[N] とし、その物体が動いた方向となす角度を θ とおく。動いた距離が x[m] のとき、この力が物体にした仕事 W[J] は、$W = Fx\cos\theta$ とかける。

例

水平な床に置かれた物体に対し、水平方向から 30° の向きに大きさ 10N の力を加え続けたところ、物体は水平に 4.0m だけ移動した。加えた力のした仕事は何 J か。$\sqrt{3} = 1.7$ とせよ。

例 2:次の各問について、指定された力は仕事をするかしないか答えよ。

(1)　ジェットコースターがレールからうける垂直抗力がジェットコースターにする仕事。

(2)　振り子の糸がおもりを引く張力による仕事。

(3)　地面に置かれた重い荷物を水平方向に押したところ、物体は動かなかったという。この力が物体にする仕事。

例 3

水平より 30° 傾いたあらい斜面にそって、物体が距離 l[m] 滑り降りるとする。物体に働く重力、垂直抗力、動摩擦力の大きさをそれぞれ F_1, F_2, F_3[N] とするとき、それぞれの力が物体にする仕事 W_1, W_2, W_3[J] を求めよ。

9.3　仕事率

人間が何らかの仕事を行うときと、機械がそれを代わりに行うのとでは、効率が圧倒的に異なるであろう。したがって、どれくらいの時間の間に、どれくらいの仕事ができたのかということを考えるのは実用的だと思う。そこで仕事率なるものを定義する。

仕事率の定義

仕事 W[J] するのに要した時間を t[s] とすると、このときの仕事率 P[J/s] を、$P = \frac{W}{t}$ によって定義する。単位は $[J/s] = [W]$ とかき、ワットということが非常に多い。

例

クレーンが質量 500kg の物体を一定の速さで 10s 間かけて 20m 持ち上げるときの、仕事 W[J] と、仕事率 P[W] を求めよ。

9.4　運動エネルギー

9.4.1　運動エネルギーの定義

ここまでにエネルギーは定義した。しかし実はエネルギーの中にも大きく分けて二種類のエネルギーがあると考えられていて、先の例にあげていたものは「運動エネルギー」というエネルギーである。すなわち、物体が何らかの勢いを持つことで物体自身がもつエネルギーであり、止まっていれば運動エネルギーはない。勢いのようなものであることを考慮すると、質量が大きい・速度が大きいとなると、運動エネルギーはどうなるだろうか？

予想

種明かしであるが、この運動エネルギーは、ちょっとした計算により導出[*3]できて、

運動エネルギー

質量 m[kg] の物体が速度 v[m/s] をもつとき、その物体がもつ運動エネルギー $K[J]$ は、$K = \frac{1}{2}mv^2$ と与えられる。

となる。したがって、質量が大きければ運動エネルギーは比例して上昇し、速度が大きければ運動エネルギーは二乗に比例して上昇するということがわかる。感覚的には正しいことがわかると思う。

例

質量 1.5×10^3kg の自動車が 20m/s の速さで走っている。この自動車のもつ運動エネルギーは何 J か。

9.4.2　運動エネルギーと仕事の関係

エネルギーを導入したときにも、エネルギーは仕事と表裏一体であり、仕事を与えれば物体の運動エネルギーが上昇することは解説した。ここでは、その与えた仕事と運動エネルギーの変化の関係性が一般に記述できることについて学ぶ。

[*3] この導出はきになる人はやってみるくらいでよい。むしろ、この物理量は非常にこれからの物理で重要であるから、暗記するのは必須である。

運動エネルギーと仕事の関係

運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_0^2$[J] をもつ物体に対して何らかの手段で仕事 $W[J]$ を与え、運動エネルギーが $\frac{1}{2}mv^2$[J] となったとき、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W$$

が成り立つ。

式的な理解も重要だが、そこまで混乱しないでほしい。ただ単に、運動エネルギーがどれくらい変化したか、は、物体に対して及ぼされた仕事と完全に等しいということを語っているだけである。意味を理解すれば、公式の暗記というものにはならないと思う。

例

速さ 2.0m/s で進む質量 2.0kg の物体を、運動の向きに 6.0N の力を加え 10m 押し続けた。このとき、物体の速さは何 m/s となるか。

9.5 位置エネルギー

9.5.1 重力による位置エネルギー

さて、エネルギーには二種類あると先に述べたが、そのもう一つが位置エネルギーというものだ。例を考えながら理解していこう。絶叫ジェットコースターのてっぺんで完全に静止していたコースターがあったとしよう。このコースターは、先の運動エネルギーという概念で考えると速さがゼロであるために、運動エネルギーの値もゼロである。しかし、そのあとコースターが斜面を下っていけば運動エネルギーを徐々に得て、最下点ではかなりの速さになる。さっきまでは速さがなかったのに、「高さ」があるだけで、その物体は運動エネルギーを獲得しうる可能性があることがわかる。つまり、「高さ」＝「位置」に依存するエネルギーがあると考えるべきである。

板書

重力による位置エネルギー

質量 m[kg] の物体が基準点からの高さ h[m] にいるとき、物体がもつ位置エネルギー U[J] は、$U = mgh$ とかくことができる。

9.5.2　弾性力による位置エネルギー

日頃見る位置的なエネルギーはやはり重力によるものがメインであるが、実はそれだけではない。位置エネルギーは様々な種類がある。ここで挙げるのが弾性力による位置エネルギーである。フックの法則のところでも学んだが、物体にばねを繋げて、伸ばしたり縮めたりして離すと、物体は運動を始める。つまり、ばねが物体に対して仕事を行っていると考えることができる。縮める距離をもっと増やしたり、伸ばす距離をもっと増やせば、物体の運動の勢いも大きくなる。つまり、どれくらいばねが伸び縮みしているか=「物体の位置」によって物体がエネルギーをもつことがわかる。したがって、ばねを繋いだ物体は位置エネルギーをもつことがわかる。これの大きさは次のように定式化できる。

弾性力による位置エネルギー

物体に対してばね定数が k[N/m] のばねをとりつけ、その伸びまたは縮みを x[m] とおくと、その物体がもつ位置エネルギー U[J] は、$U = \frac{1}{2}kx^2$ と表せる。

例

ばね定数 50N/m のつる巻きばねに物体をつけ、ばねを 0.20m だけ伸ばしたとき、弾性力による位置エネルギーは何 J か。

9.6　保存力と位置エネルギー

重力による位置エネルギーを学んだが、それについて、非常に重要な事実がある。基準面から同じ高さに物体を運ぶのに、どういう経路をとって物体を移動させたとしても実は重力がする仕事は変化しない。このように、経路に依存しない力を保存力という。重力は保存力である。この保存力が物体に及ぶとき、位置エネルギーとの関係性に重要な式関係が成り立つ。

板書

保存力と位置エネルギーの関係

保存力が物体に働いているとする。また、この保存力による位置エネルギーを U[J] とする。この物体が A から B まで移動するとき、保存力が物体にする仕事 W[J] は、$W = U_A - U_B$ とかける。

例

質量 0.25kg の小球が高さ 3.6m から 1.6m まで落下するとき、重力のする仕事は何 J か。

9.7　力学的エネルギーの保存則

力学的エネルギーの定義

力学的エネルギー＝運動エネルギー＋位置エネルギーと定義する。

例を取りながらこの力学的エネルギーについて考える。基準面に対して高さ $h_A > h_B$ とする。高さ h_A から高さ h_B まで落としたとする。このとき、前節の結果から、重力がする仕事 W は、$W = mgh_A - mgh_B$ となる。そして、以前に学んだ仕事と運動エネルギーの関係から、

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W = mgh_A - mgh_B$$

となり、少し変形すると、

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

となる。これは、A における力学的エネルギーが、B における力学的エネルギーと完全に一致しているということを意味する。すなわち、保存する。一般に、どんな位置エネルギーを考えたとしても、必ず力学的エネルギー保存則が成り立つ。したがって、次の法則が成り立つ。

力学的エネルギーの保存則

運動エネルギーを K とし、位置エネルギーを U とすると、任意の A・B という場所について、

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

となる。

例

小球が地面から高さ h の点 A から静かに出発し、なめらかな曲線に沿って転がしていく。その後最下点の B（地面と同じ高さ）を通り、その後すこし登って地面から高さ $\frac{h}{2}$ の点 C までの運動を考える。点 B と点 C における速さ v_B, v_C を答えよ。

例 2

水平でなめらかな床上で、ばね定数 25N/m のばねの一端を壁に固定し、他端に質量 1.0kg の物体をつけて置く。物体に力を加えてばねが 0.50m 伸びた位置で静かに手を離す。

(1)　ばねが自然の長さになったときの物体の速さ v_1[m/s] を求めよ。

(2)　ばねの縮みが 0.30m になったときの物体の速さ v_2[m/s] を求めよ。