

線形代数

大学編入のための数学教室

講師 明松 真司

ナレッジスターサテライト

<http://know-star.com/>

目次

第1章	ベクトル	7
1.1	ベクトルの基本計算	8
1.2	ベクトルの内積	10
1.3	演習問題	13
第2章	行列	15
2.1	行列の演算	16
2.2	逆行列	19
2.3	演習問題	20
第3章	線形独立と線形従属, 行列式	21
3.1	ベクトルが空間を「張る」という考え方	21
3.2	線形独立と線形従属	24
3.3	行列式	26
3.4	演習問題	29
第4章	連立一次方程式と基本変形	31
4.1	掃き出し法	31
4.2	逆行列を使った解法	36
4.3	等質連立一次方程式	37
4.4	演習問題	39
第5章	行列式の余因子展開と因数分解	41
5.1	行列式の諸性質	41
5.2	余因子展開	43
5.3	行列式の因数分解	45
5.4	演習問題	50

第 6 章	固有値と固有ベクトル	53
6.1	固有値と固有ベクトルの定義	54
6.2	固有方程式	56
6.3	固有方程式を解くときは「因数分解」	59
6.4	重解の固有値と, その固有ベクトル	63
6.5	演習問題	67

はじめに

線形代数学は、高専で学ぶ数学の中でも、特に「数学的な思考力」が要求されたり、「“計算の正確さ”よりも“本質の理解”を求められがち」であることから、**高専生の中でも特に苦手とする学生が多い分野**です。本当に多いです。

確かに、気持ちは分かります。最初に高専の2年ではじめて線形代数（ベクトル、行列）を学んだとき、僕は一体なにをやっているのかがサッパリ分かりませんでした。その結果、僕は目先の定期テストのために線形代数を「暗記」で済ませるようになり、一応定期テストには合格したものの、何一つ「線形代数の意味」を理解することもなく、そのまま線形代数から1度離れました。

イマイチ線形代数学って、**何が目的なのかよくわからない**ですよ。微分積分学あたりは、面積求めたり体積求めたり、速さとか加速度を求めたり、実感が湧きやすかったりするのですが、線形代数はというと、急に行列の掛け算を変なルールで決めたりとか、連立方程式を解き始めたりとか、サラスの方法とかいって行列式を謎のルールで計算したりとか...「**これって、結局何がしたいのよ?**」と思う学生が多いのも、まあ、無理もない気がします。だから、線形代数をしっかりと理解している高専生って、僕はあんまり出会ったことがありません。

でも、そのくせ**編入学試験では、ほぼ確実に線形代数の知識が要求される**んです。で、「やばい!」ということに気付いた高専生は、大急ぎで問題の解法だけを頭にぶち込もうとするのですが、結局何と何が繋がっているのか?とか、何がしたいのか?とか、結局は理解できないのです。こうして、大学に入学するとなっても、線形代数はいまいちよくわからない...というのが、よくあるオチです。

ですが断言します。線形代数は、**非常に奥深く、美しく、面白い分野**です。さらに、**理論の本質をしっかりと理解すれば、暗記などほとんどする必要はない**のです。

そして線形代数は、**信じられないほどに役に立ちます**。もちろん、工学でも。編入学試験で出題されるのも、理由は簡単ですよ。大学に入ってから「めちゃくちゃ使う」からです。だから、この講義では、**編入学試験に対応できる実力を、なるべく線形代数の本質をなぞりながら皆さんにお伝えしたい**と思っています。「何の役に立つのか」も、なるべく解説し

ます。また、あまり受験までの時間がない学生さんも多いと思いますので、**出題されやすい部分をピックアップして最短経路を心がけます**ので、ビシッと「現場で通用する実力」を、短期間で付けちゃってください。

最後にちょっと余談です。今この文章を書いている僕は、高専3年のときに、とある数学の先生の影響で線形代数の本を本気で読み始めました。数学の勉強を本気とするのは、そのときが初めてだったと思います。「本格的な数学書」を読むのは大変な道のりでした。が、ある瞬間にパーッと世界がひらけたのです。そのときから、線形代数は「感動の連続」に変わりました。高専2年で最初にやったときにあれだけ「意味不明」だった線形代数が、「楽しい」に変わりました。2014年には、線形代数の本まで書いてしまいました。編入試験の点数とか、定期テストとか単位とか、もちろん大事ですが、僕は本当は「線形代数の面白さ」に気付いてほしいのです。そういう授業を頑張ってやろうと思います。

ナレッジスター 代表 明松 真司

<http://know-star.com/>

第 1 章

ベクトル

例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ -e \end{pmatrix}$$

のように, 実数を縦に 2 つ並べた組として表される量を, **2次元実数ベクトル**と呼ぶ. 並べた数を上から順に「 x 成分, y 成分」または「第 1 成分, 第 2 成分」と呼ぶ. 2次元実数ベクトルは, xy 平面上の**有向線分 (やじるし)**に対応させられる.

同様にして,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

のように, 実数を縦に 3 つ並べた組として表される量を, **3次元実数ベクトル**と呼ぶ. 並べた数を上から順に「 x 成分, y 成分, z 成分」または「第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分」と呼ぶ. 3次元実数ベクトルは, xyz 空間上の**有向線分 (やじるし)**に対応させられる.

図

約束

- ベクトルは、**平行移動しても等しい**とみなす。
- ベクトルは、**太字で表す** ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ のように)^a。

^a 矢印をつけて表すこともある。たとえば $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$ のように。

1.1 ベクトルの基本計算

ベクトルとベクトルの和は、**成分どうしの足し算**で定義する。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

ベクトルの**実数倍 (スカラー倍)** を、成分ごとの実数倍で定義する。

$$k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

幾何的イメージ (非常に重要)

2次元実数ベクトル \mathbf{a} の**大きさ**または**絶対値** $|\mathbf{a}|$ を次のように定義する.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

3次元実数ベクトルの場合も同様に,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

幾何的イメージ (キーワードは三平方の定理!!)

特に, すべての成分が0であるようなベクトルを**ゼロベクトル**と呼ぶことにする.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

また, 大きさが1のベクトルを**単位ベクトル**と呼ぶ.

例題 1. (ベクトルの正規化)

次のベクトル \mathbf{a} と向きが同じ単位ベクトル \mathbf{e} を求めよ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

答. ベクトル \mathbf{a} の大きさ $|\mathbf{a}|$ は,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

である. ということは, \mathbf{a} の長さを $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 倍する (縮小) と, 向きは変わらず長さだけが 1 になる (向きが同じ単位ベクトルになる) ので,

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

この例題のように, ベクトルは「自分自身の大ききで割る」ことで, 向きが同じ単位ベクトルを作れる. この操作をベクトルの**正規化 (normalization)** という*1.

1.2 ベクトルの内積

ベクトルの 2 種類の積

- 内積 (inner product) $\boxed{\text{ベクトル}} \cdot \boxed{\text{ベクトル}} = \boxed{}$
- 外積 (outer product) $\boxed{\text{ベクトル}} \times \boxed{\text{ベクトル}} = \boxed{}$

ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角が θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のとき, \mathbf{a}, \mathbf{b} の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

ベクトルが**直交 (orthogonal)** する, すなわち, なす角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ となるとき, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$. また, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ なら $\cos \theta = 0$ なので, $\theta = \frac{\pi}{2}$. よって,

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ が直交} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

*1 「対称行列の直交行列による対角化」のところなどで使います. ちなみに「対称行列の直交行列による対角化」は, 編入試験でかなり頻出です.

ベクトルが成分表示

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

で与えられたとき，それらの内積は次のようにも計算できる．

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

3次元のとき

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

も同様にして，

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

例題 2. (内積の計算)

2次元実数ベクトル \mathbf{v}, \mathbf{w} を次のように定義する．

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このとき， $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ を求めよ．

答. 成分表示なので， $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1$ である．

もちろんここで終わってもいいのだが，もう少し深く考えてみよう． \mathbf{v} と \mathbf{w} は，図示してみるとわかるとおり，

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2}, |\mathbf{w}| = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$$

である．これらより， $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta$ を使って，あらためて内積を計算してみると，

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta = \sqrt{2} \times 1 \times \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

となり，最初に成分を使って計算した結果と一致する．

2次元実数ベクトルの場合，

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$\cos \theta$ について解くと,

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

この式の右辺を計算することにより, ベクトルがなす角を計算することができる. 3次元の場合も同様に,

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

例題 3. (ベクトルのなす角の計算)

次のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を求めよ.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

答. $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, |\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times (-1) + 2 \times 3 = 5$. よって,

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1.3 演習問題

(1) 3次元実数ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

このとき、次のベクトルを計算せよ.

(i) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

(ii) $3\boldsymbol{v}$

(iii) $3\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交するように t を定めよ.

(3) 3次元実数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ.

(4) [H27 千葉大学工学部 3年次編入学学力選抜]

3次元ユークリッド空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され、次の3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が与えられている. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい*2.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(5) [H27 千葉大学工学部 3年次編入学学力選抜]

$0 < \alpha < \beta$ という条件のもとで、 $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 - \beta\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b} = -\beta\boldsymbol{e}_1 + \alpha\boldsymbol{e}_2$ が与えられている. ここで、

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*2 「3次元ユークリッド空間」というのは、要するに我々が知っている3次元座標空間のこと. デカルト直交座標系 $O-XYZ$ というのは、原点が O で、座標を (X, Y, Z) で表す単なる直交座標のこと. こういう「難しそうワード」に騙されて心が折れないようにしてほしい.

で与えられる単位ベクトルである。以下の設問に答えなさい。

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を α, β を使って表しなさい。
- (2) \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を θ とおいたとき, $\cos \theta, \sin \theta$ を α, β で表しなさい。ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。

第 2 章

行列

縦方向に m 個，横方向に n 個の数を並べたものを， $m \times n$ **行列 (matrix)** または， m 行 n 列の**行列**という．具体的には， m 行 n 列の行列を以下のように表す．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) を，この行列の (i, j) 成分と呼ぶ．

ふたつの $m \times n$ 行列 A, B に対して，すべての成分がそれぞれ等しいとき， A と B は**等しい**といい， $A = B$ と書く．

行列 A を次のように置こう，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

このとき，行列 A の列は，ベクトルとみなすことができる．すなわち，

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

と置くことにより，

$$A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$$

と表すことができる．このように，行列の列をベクトルとみなすとき，それらを**列ベクトル**と呼ぶ．行をベクトルとみなすときも，同様にそれらを**行ベクトル**と呼ぶ．

特に，行数と列数が等しく n である行列を n 次**正方行列 (square matrix)** と呼び，その (i, i) 成分 ($i = 1, 2, \dots, n$) を**対角成分 (diagonal component)** と呼ぶ．対角成分以外が全て 0 である正方行列を**対角行列 (diagonal matrix)** と呼び，対角成分がすべて 1 の対角行列を**単位行列 (elementary matrix)** と呼ぶ (E と表す)．

2.1 行列の演算

行列にも演算が定義できる.

2.1.1 行列の和

2つの $m \times n$ 行列 A, B を次のように置く.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

この2つの行列の和 $A + B$ を、「各成分同士の和」により定義しよう. すなわち, 以下の^{*}ように $A + B$ を定義する^{*1}.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

行列の和について, 次のような性質が成り立つ.

A, B, C を $m \times n$ 行列とする.

1. $A + B = B + A$ (交換法則 commutative law)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則 associative law)
3. $A + O = O + A = A$ (零元 zero)

ただし, O は全成分が0であるような $m \times n$ 行列で,
 $m \times n$ **零行列 (zero matrix)** と呼ぶ.

^{*1} ちなみに, 同じ大きさの行列同士にしか和は定義されない.

2.1.2 行列のスカラー倍

$m \times n$ 行列 A と実数 c に対して、行列 A の c 倍を、「成分ごとの c 倍」により定義する。すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

このように、行列に実数をかけることを、行列の**スカラー倍**と呼ぶ。

A, B を $m \times n$ 行列, k, l を実数としたとき、次の性質が成り立つ。

1. $(k+l)A = kA + lA$ (**分配法則 distributive law**)
2. $k(A+B) = kA + kB$ (**分配法則 distributive law**)
3. $(kl)A = k(lA)$

2.1.3 行列の積

簡単のために、まずは 2×3 行列と 3×4 行列に限定して考える。 A, B を次のように置こう。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}.$$

さて、 A の 1 行目と B の 1 列目に次のように印をつけてみよう。

$$\left(\begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array} \right).$$

そして、 $(1,1)$ 成分 $(AB)_{1,1}$ を次のように定義する。

$$(AB)_{1,1} = \boxed{a_{11}}\boxed{b_{11}} + \boxed{a_{12}}\boxed{b_{21}} + \boxed{a_{13}}\boxed{b_{31}}.$$

このように、 $l \times m$ 行列 A と $m \times b$ 行列 B の積 AB の (i, j) 成分 $(AB)_{i,j}$ を

- A の第 i 行.
- B の第 j 列.

の対応する成分同士の積の和によって定義する。数式で表すと、

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}.$$

行列の積が定義されるのは、 $l \times m$ 行列と $m \times n$ 行列という形の時だけ。

行列の積のサイズ

さて、行列の積には重要な性質がある。例えば次の2つの行列を考えよう。

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

この2つの行列の積を、二通りの順番で計算してみる。

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1-1 \\ 1+1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+1 \\ -1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

このように、行列は積について可換ではない*2。すなわち、ある行列 A, B に対して、積 AB, BA がともに定義されているとき、

$$AB \neq BA$$

となることがあるのだ。このことから、ある行列 A が与えられているとき、これに左から行列 B をかけるのか、右から行列 B をかけるのかを、きちんと区別をしなければいけない。

*2 このことを、積について非可換であるということも多い。

行列 A, B, C , 実数 k に対し, 次の性質が成り立つ (ただし, 行列の和, 積はすべて定義されているものとする).

1. $(AB)C = A(BC)$ (**結合法則 associative law**)
2. $(A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB + AC$
(**分配法則 distributive law**)
3. $k(AB) = (kA)B$
4. $AE = EA = A$ (**単位元 unit element**)

ただし, E は単位行列である.

2.2 逆行列

以降, 行列の和や積があらわれた時には, 断りなく, その和や積は定義されているものとしよう.

正方行列 A に対し, ある正方行列 B が存在し, 次を満たすとき, B を A の**逆行列 (inverse matrix)** と呼ぶ.

$$AB = BA = E.$$

このとき, B を A^{-1} と書く.

そして, 行列 A に逆行列が存在するとき, A は**正則行列 (regular matrix)** であるという*³. 逆行列について, 次の性質が成り立つ.

正則行列 A, B に対して, 次が成り立つ.

1. 行列 A に対し, A^{-1} は一通りに定まる.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$ (A^{-1} の逆行列は A).
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

正則行列 A に対して逆行列 A^{-1} は, 0 でない実数における逆数の役割を果たす. 0 でない実数にその逆数をかけると 1 となるように, 正則な行列 A に対して A^{-1} をかけると, 単位行列 E になるのである.

*³ 逆行列が存在しない正方行列もたくさんある. そのような行列は正則でないという意味で**非正則**であるといふことが多い.

逆行列を求める感覚をつかむために、2次の逆行列の公式を証明なしで与えよう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ の逆行列 } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.3 演習問題

(1) 3次実正方行列 A, B を次のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

次の行列を計算せよ。

(i) AB

(ii) BA

(2) 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を、公式を用いて求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について、 $A\boldsymbol{v}$ を計算せよ (\boldsymbol{v} は 3×1 行列とみなせばよい)。

(4) [H27 金沢大学理工学域 電子情報学類/環境デザイン学類]

任意の x, y, z について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる 3×3 行列 A を考える。 A を求めよ。

第3章

線形独立と線形従属，行列式

かなりつまづきやすいポイントである「線形独立と線形従属」，そして「行列式」という概念を学ぼう。このあたりから線形代数が「何をしたいのかわからない」と感じ始める学生が多い。しっかりと「筋道」を見失わないために必要なのは、「ベクトルが空間を張る」という考え方だ。

3.1 ベクトルが空間を「張る」という考え方

ベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_n によって作られた次のような形のベクトルを， v_1, v_2, \dots, v_n の線形結合 (linear combination) という。

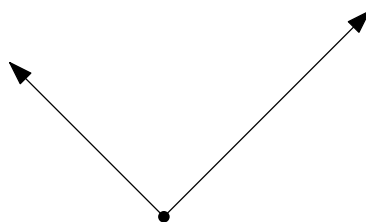
$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$$

線形結合のイメージ

線形結合の「イメージ」は，線形代数を学ぶ上でかなり重要である。

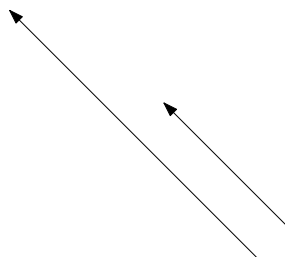
3.1.1 線形結合でゼロベクトルを作る

2つのベクトル v と w の線形結合で、ゼロベクトル $\mathbf{0}$ を作ることを考えよう。例えば、次の図のような位置関係の v, w の線形結合で $\mathbf{0}$ を作るには、**どちらも長さをゼロに退化させるほかに方法はない。**



$$C_1v + C_2w = \mathbf{0} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

いっぽうで、次のような位置関係（平行）ならば、うまく v と w の長さとお向きを調節すれば、 $C_1 = C_2 = 0$ 以外にもゼロベクトルを作る方法がある。



$$C_1v + C_2w = \mathbf{0} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \text{ 以外の } C_1, C_2 \text{ が存在.}$$

線形結合でゼロベクトルを作る

ベクトルの位置関係 \Rightarrow 方法がどのくらいあるか? で判断できる.

3.1.2 張る空間

ベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ の線形結合によって作れるすべてのベクトルによって出来る空間 (集合) を, ベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が**張る空間 (span space)** という (これを $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ とあらわす).

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \{ C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 + \dots + C_n \mathbf{v}_n \mid C_1, C_2, \dots, C_n \text{ は実数} \}$$

張る空間のイメージ

3.2 線形独立と線形従属

ベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_n について,

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n = \mathbf{0}$$

(何らかの線形結合でゼロベクトルを作れたと仮定)

のとき, C_1, C_2, \dots, C_n のとり方が $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ に限るならば, ベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_n は**線形独立 (linearly independent)** であるという.

そうでない ($C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ 以外にゼロベクトルの作り方が存在する) とき, ベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_n は**線形従属 (linearly dependent)** であるという.

例 4. 2次元実数ベクトル v, w は,

- **線形独立** \Rightarrow 平行でない
- **線形従属** \Rightarrow 平行である

ことに対応している. 3次元実数ベクトル u, v, w については,

- **線形独立** \Rightarrow 1平面上にない
- **線形従属** \Rightarrow 1平面上にある

ことに対応している (このイメージを大切に!!).

例題 5. (線形独立性の判定)

次のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ が線形独立か線形従属かを判定せよ.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

答. 線形独立の定義にのっとり判定をしよう. まず, 線形関係式をたてる (線形結合=ゼロベクトルの式).

$$C_1\mathbf{u} + C_2\mathbf{v} + C_3\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

左辺に具体的な成分を代入しよう.

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

左辺の実数倍と和をまとめると

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 \\ C_2 + C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

各成分を比較すると, 連立一次方程式が得られる.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 & = 0 \\ C_2 + C_3 & = 0 \\ C_3 & = 0. \end{cases}$$

これを解くと, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ が得られるので, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ は線形独立.

例題 6. (線形従属)

次のベクトル \mathbf{v}, \mathbf{w} が線形独立か線形従属かを判定せよ.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

答. 線形関係式をたてる.

$$C_1\mathbf{v} + C_2\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

具体的な成分を代入して整理すると,

$$\begin{pmatrix} C_1 - 2C_2 \\ C_1 - 2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

成分を比較すると

$$\begin{cases} C_1 - 2C_2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

これを解きたいのだが, 結局どちらも同じ式なので,

$$C_1 - 2C_2 = 0.$$

文字2つに対し式1つ. この解を1つに定めることはできない. こういうときは, **任意定数**を使って解を表す. まず, 式を変形すると,

$$C_1 = 2C_2.$$

ここで, $C_2 = t$ (t は任意の実数) とおくと,

$$C_1 = 2t.$$

よって, 任意定数 t をつかって, 解は $C_1 = 2t, C_2 = t$ と表せる. t は何でも良いので, 例えば $t = 1$ として $C_1 = 2, C_2 = 1$ というのも, $C_1\mathbf{v} + C_2\mathbf{w} = \mathbf{0}$ を満たす. よって, \mathbf{v}, \mathbf{w} は線形従属.

3.3 行列式

ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ が線形独立か線形従属かを, ラクに判定する方法はないだろうか?

2次元実数ベクトルの場合,

線形従属 \iff 平行 (1直線上にある)

に対応していることを思い出そう. 例えば, 次の2つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は平行なので, 線形従属である.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \left(= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

「 \boldsymbol{v} と \boldsymbol{w} の第1成分と第2成分の比」が一緒になっていることに注意.

一般の場合に話を戻そう. ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ についても, 線形従属ならば \boldsymbol{v} と \boldsymbol{w} の第一成分と第二成分の比が等しくなるはずなので,

$$v_1 : v_2 = w_1 : w_2.$$

という, 線形従属になるための「条件」が得られる. これを変形すると,

$$v_1 w_2 = w_1 v_2.$$

左辺にすべて移項すると,

$$v_1 w_2 - w_1 v_2 = 0.$$

という, 「線形従属かどうかを判定する条件」が得られた.

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ が線形従属かどうかを判定するには...

(1) $v_1 w_2 - w_1 v_2$ を計算し, 0になるかどうかを確認する.

(2) $v_1 w_2 - w_1 v_2 = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{線形従属.} \\ 0 \text{でない} \Rightarrow \text{線形従属でない (すなわち, 線形独立).} \end{cases}$

これは, 「 $v_1 w_2 - w_1 v_2$ 」という何やら特殊な意味を持っているらしい「数」を計算して値を調べることにより, 「ベクトルが線形従属かどうか」という大事なことが分かる! ということを表している. さらに, この $v_1 w_2 - w_1 v_2$ は, 次のように考えると覚えやすい.

$$\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{w_1} \\ \overline{v_2} & \overline{w_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \begin{matrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{matrix} \\ \blacktriangle & \blacktriangle \end{matrix} \\ \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ v_1 w_2 - w_1 v_2$$

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$|A| = ad - bc$$

と書き, $|A|$ を A の**行列式 (determinant)** と呼ぶ.

これを見た時に, 2次正方行列の逆行列の公式を思い出した人は鋭い.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$|A| = ad - bc = \begin{cases} 0 \text{ のとき, } A^{-1} \text{ は } \boxed{} \\ 0 \text{ でないとき, } A^{-1} \text{ は } \boxed{} \end{cases}$$

3.3.1 3次より大きな行列へ

2次正方行列について, 次のようなことが分かった.

- (i) 行列に対して「重要な値」である「**行列式**」を計算.
- (ii) それを計算すると, **列ベクトルが線形従属か線形独立か**がわかる.
- (iii) さらに, 行列式が0かどうかで**正則かどうか (逆行列を持つかどうか)**も判断できる.

これは3次以上の正方行列についても同様に言える (詳しい証明はしないが). そして3次以上の正方行列に対しても「行列式」は定義される. 3次だけを以下に挙げよう.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は次のように計算される.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

サラスの方法

行列式まとめ

正方行列 A に対して,

- $|A| = 0$ なら, 列ベクトルは**線形従属**. $|A| \neq 0$ なら, 列ベクトルは**線形独立**. (線形従属かどうかをラクに判断するために定義された値)
- $|A| = 0$ なら, A の逆行列は存在しない (非正則). $|A| \neq 0$ なら, A の逆行列が存在する (正則).
- 2次は「たすきがけ」, 3次は「サラスの方法」, 4次以上は後述 (余因子展開).

3.4 演習問題

(1) 次のベクトルの組が線形従属であることを示せ^{*1}

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

^{*1} 列ベクトルで並べて行列式を計算し, その値で従属かどうか調べる! ということは出来ない. なぜなら, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を並べた行列は, 正方行列ではなくなってしまう, 行列式がそもそも定義できないから. ここで「それだけを丸暗記していた学生」はお手上げとなってしまいが, そうなる必要はない. なぜなら, あなたは既に「線形独立, 線形従属の定義」を知っているのだから, そこに戻れば良いだけだから.

ちなみに, 2次元実数ベクトルが3本以上あると, 必ず線形従属になる (線形関係式の係数の数 > 式の数となるから). 同様に, 3次元実数ベクトルが4本以上あると必ず線形従属, ..., n 次元実数ベクトルが $n+1$ 本以上あると必ず線形従属...となる.

(2) 次のベクトル x を, u と v と w の線形結合で表わせ.

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) [H28 金沢大学理工学域 電子情報学類/環境デザイン学類]

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ に対して, 行列式 } |P| \text{ を求め, } P \text{ が正則かを判定せよ.}$$

(4) [H27 千葉大学工学部 3年次編入学学力選抜]

3次元ユークリッド空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され, 次の3つのベクトル a, b, c が与えられている.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ベクトル a, b を列ベクトルとする行列を $A = (a \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として, 行列 $A^t A$ とその行列式 $|A^t A|$ を求めなさい. ここで, ${}^t A$ は A の転置行列 (transpose matrix) である*2.

*2 A の転置行列 ${}^t A$ とは, A の行を列, 列を行として持つ行列のこと. A が $m \times n$ 行列なら, ${}^t A$ は $n \times m$ 行列となる. 転置行列を A^T と表すことも多い (工学系だと A^T 派が多いかも).

第 4 章

連立一次方程式と基本変形

今まで、何度も「連立一次方程式」が現れた。このように、「連立一次方程式を解く」ということは、線形代数学を学んでいく上で避けて通ることができない、大変重要なものだ。ここでは、行列とベクトルを使って連立一次方程式を捉え直し、「システムティックな連立一次方程式の解き方」を考えよう。

4.1 掃き出し法

4.1.1 加減法

次の連立方程式を考えよう。

$$\begin{cases} x + 3y = 1 & (4.1) \\ 3x + 4y = 2 & (4.2) \end{cases}$$

この連立方程式は、中学校で学習する**加減法**を用いて解くことができる。

まず、 x の係数をそろえるために、(4.1) の両辺を 3 倍しよう。

$$\begin{cases} 3x + 9y = 3 & (4.3) \\ 3x + 4y = 2 & (4.4) \end{cases}$$

あとは、 x を消去するために、(4.4) から (4.3) を辺々引くと、

$$\begin{cases} 3x + 9y = 3 & (4.5) \\ -5y = -1 & (4.6) \end{cases}$$

という形に変形できて、(4.6) より、 $y = \frac{1}{5}$ が得られる。あとは、これを (4.1) に代入すると、

$$x = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

という解が得られる。

実はこの「加減法」には、非常に大切なエッセンスが山ほど詰まっている。先ほどの手順の中で行なったのは、

- (i) (4.1) の両辺を3倍。
- (ii) (4.4) から (4.3) を辺々引く。

という操作だった。そしてこの操作の末に、簡単になった連立方程式から、もとの連立方程式の解を導いたのだった。

「加減法」では暗黙のうちに、

- (i) ある式の両辺を(0でない)定数倍しても、解は変わらない。
- (ii) ある式からある式を引いても、解は変わらない。

という事実を使っている。与えられた連立方程式を「解が変わらない変形」の繰り返しで簡単な形に帰着することで、正しい解を得ることができていたのだ。

4.1.2 連立一次方程式の行列表示

連立一次方程式は、行列とベクトルを使って表すことができる。たとえば、

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{cases}$$

という連立一次方程式は、次のように表せる。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_b$$

A を係数行列 (coefficient matrix), x を解ベクトル (solution vector), b を定数ベクトル (constant vector) と呼ぶ。

加減法を行列表示で追いかける

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \right.$$

$$x = \boxed{} \quad y = \boxed{}$$

4.1.3 拡大係数行列

変形の過程で動いているのは、係数行列と右辺だけなので、そこだけを抜き出して変形を施して行けば良いとわかる。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \underbrace{\dots}_{\text{変形}}$$

この行列 $(A|b)$ を、**拡大係数行列 (argumented coefficient matrix)** という*1. 拡大係数行列で先ほどの変形を書き直すと、

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

4.1.4 行基本変形と掃き出し法

連立一次方程式の解を変えない変形は、

- (i) ある行とある行を交換する.
- (ii) ある行を (0 でない) 定数倍する.
- (iii) ある行の (0 でない) 定数倍を、ある行に加える.

という操作に集約される。この3つの変形を**行基本変形 (fundamental row operation)** という。

*1 高専時代に僕と同期だった友人が、「この行列を何と言いますか？」と、電通大編入の推薦面接で聞かれたらしい。

行基本変形で拡大係数行列を簡単な形に帰着し、元の形に戻して解を得ることにより、欲しかった連立一次方程式の解を「決まった手順で」求められる。

例題 7. 次の連立一次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} x + 3y - z & = -4 \\ x + 4y - 2z & = -8. \\ -3x - 7y + 2z & = 9 \end{cases}$$

まず、拡大係数行列を作る。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 & -8 \\ -3 & -7 & 2 & 9 \end{array} \right)$$

連立一次方程式を行基本変形で解くときは、0の階段を作るという目標を常に頭に浮かべておくと、簡単な形に帰着できる。実際にやってみよう。まず、左上の1を使って、(2,1)成分と(3,1)成分に0を作るために、

- 2行目に1行目 $\times(-1)$ を足す。
- 3行目に1行目 $\times 3$ を足す。

という行基本変形を実行する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ \boxed{1} & 4 & -2 & -8 \\ \boxed{-3} & -7 & 2 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

次に、(2,2)成分の1を使って、その下の(3,2)成分に0を作るために、

- 3行目に2行目 $\times(-2)$ を足す。

という行基本変形を実行する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

さて、拡大係数行列の左下に「**0の階段**」を作ることが出来た。このように、行基本変形により、行列に「0の階段」を作る一連の操作を、**前進消去 (forward elimination)** と呼ぶ。

「0の階段」さえ作ることが出来てしまえば、解を求めるのは簡単。まず、変形後の拡大係数行列を、通常の連立方程式に戻そう。

$$\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ y - z = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

すると、3番目の式からすぐに $z = 5$ が得られる。次に、 $z = 5$ を2番目の式に代入すると、

$$y - 5 = -4 \quad \therefore y = 1.$$

と、 $y = 1$ が得られる。さらに、これらを1行目に代入すると、

$$x + 3 \times 1 - 5 = -4 \quad \therefore x = -2.$$

こんな風に、後ろの式から順番に、解がひとつずつ決まって行く。この手順を**後退代入 (backward substitution)** という。

このように、連立一次方程式は、

1. 拡大係数行列を作る。
2. 前進消去を行う (0の階段)。
3. 通常の連立方程式に戻し、後退代入を行う。

という決まった手順で、いつでも解を求めることが出来る。

この方法を**掃き出し法 (sweep out method)** という。

例題 8. 次の連立一次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

まず、この連立一次方程式の拡大係数行列を作ってみると、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

となる。この拡大係数行列に対して、前進消去を行おう。最初に、左上の1を使って、(2,1)成分と(3,1)成分に0を作るために、

- 2行目に1行目 $\times(-1)$ を足す.
- 3行目に1行目 $\times(-2)$ を足す.

という行基本変形を実行する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -2 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

さらに, (3,2) 成分に 0 を作るために,

- 2行目と3行目を $-1/3$ 倍する.
- 3行目に2行目の (-1) 倍を加える.

という行基本変形を実行すると,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

これで前進消去が終了したが, 偶然, 3行目がすべて0になった. 通常の連立方程式の形に戻すと,

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

となり, 式の数が2本になってしまった.

この連立方程式を満たす x, y, z は一組には決まらない. こういうときは, **任意定数**を用いて解を表す. $z = t$ とおくと, $y = -t$ さらに, 1本目の式より,

$$x = 4t$$

となり, 連立方程式を満たす組

$$x = 4t, y = -t, z = t \quad (t \text{ は任意の実数})$$


が得られる. このように, 連立方程式の解が無数に存在する場合でも, やはり同じ方法でうまく解を求められる.

4.2 逆行列を使った解法

行列表示された連立一次方程式 $Ax = b$ は, A が正則 (A^{-1} が存在する) なら, 両辺に左から逆行列をかけることによって,

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

と、解を求められる。



例題 9. 次の連立方程式を解きなさい.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

まずは行列表示しよう.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

左から係数行列 A の逆行列 A^{-1} をかければ良い.

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、これを両辺に左からかけると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって、 $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{5}$ が得られた.

4.3 等質連立一次方程式

連立一次方程式の中で特に重要なのは、右辺がゼロベクトル、すなわち、 $Ax = \mathbf{0}$ と表せるものである。このような連立一次方程式を**等質連立一次方程式**という（ただし、 A は正方行列とする）。

- $|A| \neq 0$ (A^{-1} が存在)

このとき、 A^{-1} を左からかければ、

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\mathbf{0}.$$

ゼロベクトルはどんな行列をかけてもゼロベクトルなので、

$$x = \mathbf{0}.$$

このように、等質連立一次方程式は、係数行列 A が正則なら、 $x = \mathbf{0}$ という解しか持たない。これを**自明な解 (trivial solution)** という。

- $|A| = 0$ (A^{-1} が存在しない)

このとき, $Ax = 0$ は $x = 0$ 以外の解を無数にもつ. $x \neq 0$ である解を**非自明な解 (non-trivial solution)** という.

この事実は, **固有値, 固有ベクトル**など, 様々な場面で大変重要である.

4.4 演習問題

(1) 次の連立一次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

(2) 次の連立一次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

(3) 次のベクトルの組 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ が線形独立か線形従属かを判定せよ.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(4) 3次元実数ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

このとき, \mathbf{v} を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の線形結合で表わせ.

(5) 任意の正方行列 A の逆行列 A^{-1} は, 次の手順で求められる.

- (i) A と単位行列 E を並べて拡大係数行列 $(A|E)$ を作る.
(ii) 基本変形で A を単位行列 E に変形する (気合) と, 右側に A^{-1} が現れる.

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$$

この方法で, 次の行列の A の逆行列を求めよ*2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*2 え! ? そんな簡単な! ? と手順を見て思ったかもしれないが, この手順, 実際にやってみると意外にしんどいことに気付いてほしい. ま, 逆行列求めるのって一般にけっこうしんどいのだ.

(6) [平成 26 年度 神戸大学経済学部 3 年次編入学試験]

3次元列ベクトル $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ から成る行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

について、次の問に答えなさい。

- (1) 行列 A の行列式の値を求めなさい。
- (2) 行列 A の逆行列を求めなさい。
- (3) 列ベクトル a^1, a^2, a^3 が線形独立であることを、線形独立性の定義に基づき示しなさい。

第 5 章

行列式の余因子展開と因数分解

2 次の行列式はたすきがけ，3 次の行列式はサラスの方法，というふうに計算をすれば良かったが，4 次よりも大きい行列式の値を求めるには，余因子展開という方法を使う．また，行列式を“簡単に”計算するための知識や，行列の固有値を計算するときに必要な「行列式の因数分解」も扱おう．

なお，この章は基本的に「計算テクニック」を皆さんに習得してもらうことを目的とする．もちろん，あらゆることは「証明」が出来るのだが，あまり後に繋がる興味深い内容というわけではないので，思い切って証明や導出はザクッと割愛させていただくのでご了承願いたい．どうしても知りたい場合は，自らの力で証明するか，別の教科書を参照してもらえれば良いと思う．

5.1 行列式の諸性質

行列式の基本的な性質をあげる．

行列式の諸性質

(i) 行列式は**転置で変わらない**.

$$|A| = |{}^tA|.$$

(ii) 行列式は、**行(列)を入れ替えると符号が変わる**.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 列目} \leftrightarrow 3 \text{ 列目}).$$

(iii) 行列式は、**行、列ごとに定数をくくり出せる**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 行目から } c \text{ をくくりだした})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ca_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 列目から } c \text{ をくくりだした})$$

(iv) 行ベクトル(列ベクトル)が**線形従属なら行列式は0**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

(1行目と3行目が同じなので、行ベクトルが線形従属。瞬殺。)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

(これも線形従属。これも瞬殺。)

(v) 行列式は、行、列ごとに和で分けられる（多重線形性）。

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

(vi) ある行（列）の定数倍を、別の行（列）に加えても行列式は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} & a_{13} + ca_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（1行目に、2行目の c 倍を加えた）

(vii) 積の行列式は行列式の積

$$|AB| = |A||B|.$$

5.2 余因子展開

2次の行列式はたすきがけ、3次の行列式はサラスの方法で計算できた。4次より大きな行列式は、余因子展開を使って2次 or 3次に帰着しよう。例を通じて解説する。

$$\begin{pmatrix} + & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

【左上にプラス、一歩動くごとに符号がひっくりかえる!!】

例題 10. 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

答.

(i) 第1列で展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{30} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_6 + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{-15} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{-5} \\
 = 1 \times 30 - 2 \times 6 + 3 \times (-15) - 1 \times (-5) = -22.$$

(ii) 第2行で展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_6 + 0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_0 - 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}_2 + 0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}_0 \\
 = -2 \times 6 - 5 \times 2 = -22.$$

余因子展開を数式で書くと

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ik} \Delta_{ik}$$

とか表せるのだが、まあこの式よりも、実際に余因子展開をきちっとできるかどうか?が重要だと思う。

行列式の計算のワザ.

(i) 上三角行列 (upper triangle matrix) の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} \quad (\text{対角成分の積})$$

(ii) 次数下げ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

5.2.1 0をつかって楽に余因子展開

余因子展開は「0が多い行(列)」で行うと楽. これを利用して, なるべく楽に余因子展開をしよう.

例題 11. 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

答.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 25 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -14 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 2 \\ -14 & -2 \end{vmatrix} = -50 - (-28) = -22. \end{aligned}$$

5.3 行列式の因数分解

行列の「固有値」を求めるとき, 行列式の因数分解が非常に重要になる.

行列式の因数分解の流れ.

- (i) 行列式の値を変えずに, 行 or 列に共通因数を作る.
- (ii) それをくくりだす. これをやれるだけやる.

行列式の中のごちゃごちゃを, 行列式の外に「できるだけ」追い出す. というイメージ.

例題 12.

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix} \text{を求めよ.}$$

答. まあ、サラスの方法を使っても、もちろん計算できる。実際にやってみると、

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix} = -b^3 + ab^2 + a^2b - a^3$$

しかし、サラスの方法は計算がごちゃごちゃしていて面倒くさいのと、展開された形の答えが出てきてしまう。もう少し、エレガントに答えを求めてみよう。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ a+b & b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 0 & a-b \\ 0 & a-b & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a+b) \begin{vmatrix} 0 & a-b \\ a-b & 0 \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+b)(a-b)^2. \end{aligned}$$

行列式の答えが「因数分解」された形で求められた。これが行列式の因数分解である。どちらが良いのか？ たぶん、因数分解のほうがよい。なぜなら、

- 展開された形の答えを因数分解→難しい
- 因数分解された形の答えを展開→簡単

だからだ。前者の答えを後者の形に変形するのは難しいが、逆は簡単。なので、因数分解された形の答えのほうが、洗練されているだろう。さらに、次のようなことも起こる。

例題 13. 次の行列 A が非正則となる a と b の条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{pmatrix}.$$

答. 非正則となってほしいので、行列式 $|A| = 0$ になってほしい。

(1) サラスの方法で $|A|$ を計算する。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix} = -b^3 + ab^2 + a^2b - a^3 = 0$$

ここから、 a と b の条件を求めると言われてもなかなか難しい。

(2) 因数分解で $|A|$ を計算する。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix} = -(a+b)(a-b)^2 = 0.$$

$a+b=0$ または $a-b=0$ となればよいので、求める条件は $a=-b$ または $a=b$ と、すぐわかる。

こういうことが結構起こる。特に、行列の固有値を求めるときに「固有方程式」を解く必要があるのだが、その場合も因数分解が出来ないとかなり苦労することになる。

5.3.1 例題をたくさんといてみる。

「行、列の共通因数のつくりかた」が、因数分解の腕の見せ所。これは「さまざまなコツ」を知っているかどうか、「こうすればうまくいきそう」が肌感覚で分かるかどうか、これらが勝負の鍵を握る*1。

例題 14. 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

答. これは**ヴァンデルモンドの行列式 (Vandermonde determinant)** と呼ばれる行列式で、**誤り訂正符号 (error-correcting codes)** などの分野で重要な役割を演じる。

*1 あと、大事なことだが、行列式の因数分解の問題は比較的編入試験で出題される確率が高い。

行列式の因数分解の大事なエッセンスが詰まっているので頑張って計算してみよう。

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ba+a^2) \\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ca+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+ca-ba \\ 0 & d-b & d^2-b^2+da-ba \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & (c-b)(c+b) + (c-b)a \\ d-b & (d-b)(d+b) + (d-b)a \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & (c-b)(a+b+c) \\ d-b & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+d \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & d-c \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).
 \end{aligned}$$

「とにかく作れそうな共通因数を作る」→「ひたすらくりだして行列式を小さくしていく」というイメージを掴んで欲しい。ちなみに、この計算のプロセスでは、「行列式は一度も直接計算していない」ことにも気付いてくれたら嬉しい*2。

ちなみに、一般のヴァンデルモンドの行列式の計算公式がある（覚えなくて良い）。

$$|V_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

*2 ちなみにこの因数分解は、信州大学で平成27年度にそのまま出題された。

例題 15. 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & x & y & x \\ x & x & x & y \\ x & y & x & x \\ y & x & x & x \end{vmatrix}$$

答. すべての行 (列) が「 x が 3 つ, y が 1 つ」で構成されていることがポイント.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & x & y & x \\ x & x & x & y \\ x & y & x & x \\ y & x & x & x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3x+y & x & y & x \\ 3x+y & x & x & y \\ 3x+y & y & x & x \\ 3x+y & x & x & x \end{vmatrix} \\ &= (3x+y) \begin{vmatrix} 1 & x & y & x \\ 1 & x & x & y \\ 1 & y & x & x \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} \\ &= (3x+y) \begin{vmatrix} 1 & x & y & x \\ 0 & 0 & x-y & y-x \\ 0 & y-x & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (3x+y) \begin{vmatrix} 0 & x-y & y-x \\ y-x & x-y & 0 \\ 0 & x-y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(y-x)(3x+y) \begin{vmatrix} x-y & y-x \\ x-y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-y)^2(3x+y) \begin{vmatrix} 1 & y-x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-y)^3(3x+y). \end{aligned}$$

例題 16. 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

こういう「対角成分から λ が引かれている行列式」の因数分解とは、今後長い付き合いになる。今のうちにちょっと練習しておこう。

答.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 4-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(2+\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(2+\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(\lambda+2)^2(\lambda-4).
 \end{aligned}$$

こればかりは経験値ですよ！経験値があれば、ああ、これはあのときと同じだなというのが増えてきてたくさんの因数分解ができるようになる。がんばろう。

5.4 演習問題

(1) [2016年度 龍谷大学 理工学部電子情報学科 3年次編入学試験]

次の行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) [2016年度 豊橋技術科学大学 3年次編入学試験]

次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

(4) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

(5) [2015 年度 名古屋工業大学 3 年次編入学試験]

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(6) [2015 年度 筑波大学情報学群 学群編入学試験]

未知数 x, y を含む次の 3 つの行列に関して, 設問 (1)-(4) に答えなさい.

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \mathbf{G}(x) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \mathbf{H}(y) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし, a, b, c はいずれも 0 でないものとする.

- (1) $\mathbf{G}(x)$ と $\mathbf{H}(y)$ の行列式 $|\mathbf{G}(x)|, |\mathbf{H}(y)|$ をそれぞれ求めなさい.
- (2) $|\mathbf{G}(x)| = |\mathbf{H}(y)|$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.
- (3) $|\mathbf{G}(x)|, |\mathbf{H}(y)|$ を使って $\mathbf{F}(x, y)$ の行列式 $|\mathbf{F}(x, y)|$ を表しなさい.
- (4) $|\mathbf{G}(x)| \neq |\mathbf{H}(y)|$ のとき, $|\mathbf{F}(x, y)| = 0$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.

第6章

固有値と固有ベクトル

この章は、大学編入試験を受験するにあたって、もっとも重要なものであると言って良いと思う。固有値固有ベクトルは、とにかく出題されやすい。工学部を受験するなら、7割くらいの大学で出題されると言っても良い。

なぜ、そんなに出題されやすいのか？ その理由を、僕は次のように分析している。

- たくさんのことに同時に問うことができる。
 - 固有方程式を立てられるか。
 - 行列式の因数分解を使って固有方程式は解けるか。
 - 掃き出し法を使って連立方程式を解き、固有ベクトルは求められるか。
 - (さらに「対角化」をこれに加えて出題すれば、「対角化を理解しているか？」も問える)
- その過程で計算ミスをしなにかどうかを試せる。

まあ言ってみれば、今までの**集大成的**なところがあるわけだ。

あと、たくさんを問えるわりに問題文は単純（行列を1個書いて「固有値と固有ベクトル求めよ」と書くだけ）なので、出題する側も楽だというのがあってもいい（笑）とにかく、かなり得点を大きく左右してくる確率が高いところだと思うので、必ずおさえておくことにしよう。

あ、それともうひとつ。高専生って、一応は固有値固有ベクトルの計算の練習はするから、それなりに“計算は”出来ることが多い。が、この教材を使ってくださっているあなたには、必ず次の間に答えられるようになってほしい。

「固有値、固有ベクトルって何ですか？」「固有方程式って何ですか？」

僕は、これにきちっと答えられる高専生を今のところ見たことがない。

しかしながら、この問には答えられないが、計算はできる。これって、**自分が何を計算しているのか分かっていない**ってことじゃないのか？

断言するが、**それでは線形代数を理解しているなんて到底言えない**。僕はあなたがたに「計算ロボット」にはなあってほしくないし、線形代数の「本質」をわかってほしい。全てのことには理由と意味がある。それを分からないままに計算だけができて、社会に出てから良いように使われる「固有値固有ベクトル計算マシン」になるだけだ。しかも、固有値と固有ベクトルなんてコンピュータのほうが正確に早く計算できるから、計算だけ出来たって実際のところ何の意味もないのだ。ぜったい、そうなっちゃいけないですよ。

6.1 固有値と固有ベクトルの定義

ベクトル v に行列 A を左からかける。すなわち、 Av を計算すると、 v は新たなベクトル Av に変換される。「**行列はベクトルを変換する**」と捉えることができる*1

$$v \rightarrow \underbrace{Av}_{v \text{ を } A \text{ で変換}}$$

例題 17. 次の行列 A は、ベクトルのどのような変換を表すか。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

例えば2次元実数ベクトル $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を A で変換してみよう（ちなみに、ベクトルは2次元じゃないと積 Av が定義できない）。

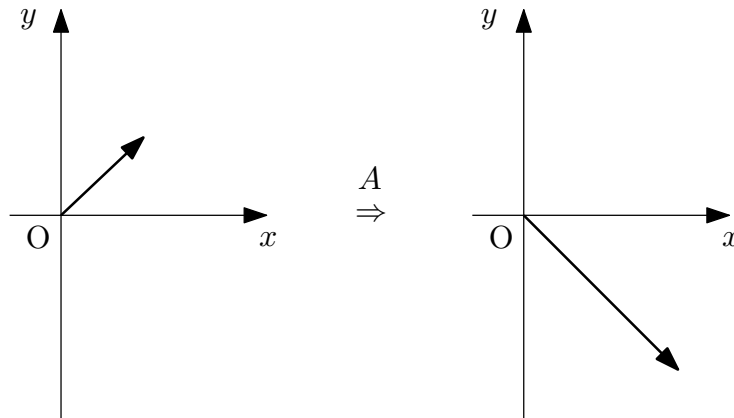
$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0 \\ 0-4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

こんなふうに、 v は新たなベクトル Av に変換される。この変換は「 y 成分の符号をひっくりかえ」して「長さを2倍にする」変換である。「 x 軸に対する鏡映変換」と「2倍」の合成というやつである。

6.1.1 もう少し深く掘り下げしてみる

ベクトルを行列で変換すると、一般に**向きも大きさも変わる**。

*1 この計算規則を、行列 A により決まる線形写像という。詳しくは第8章で解説しています。



しかし、 A によって変換しても長さは変わるかもしれないが向きがかわらないベクトル v をうまく選ぶことができる。たとえば、先ほどの A に対して、

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を選んでみると、 Av は

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2v}}$$

となり、向きが変わらず、長さだけが変わる。

A による変換は

- (i) x 軸に関する鏡映変換
- (ii) 長さの 2 倍

の合成なので、 x 軸上を指すベクトルは「 x 軸に関する鏡映変換」の影響を受けず、長さだけが 2 倍されるということである。一般に、 x 軸上を指すベクトル

$$v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書くと、

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2v}}$$

こんなふうに、

- (i) 行列 A は、ベクトルを変換する。
- (ii) 一般に、ベクトルを変換すると向きも長さも変わるが、 A の変換で「向きは変わらず長さだけが変わる」ようなベクトル v を選ぶことができる。

ということを、まずは「感覚的に」理解してほしい。

6.1.2 固有値と固有ベクトルの定義

これをもっと一般的にしたのが、固有値と固有ベクトルの定義である。\$n\$ 次正方行列 \$A\$ を考えよう。

- (i) \$A\$ は \$n\$ 次元実数ベクトルを \$n\$ 次元実数ベクトルに変換する。
- (ii) それによってベクトルは (ふつうは) 向きも大きさも変わってしまう。
- (iii) しかし、\$A\$ で変換しても向きは変わらないようなベクトル \$v\$ を選ぶことはできる。
- (iv) その \$v\$ を \$A\$ で変換したら長さだけが変わるので、長さは \$\lambda\$ 倍されるとすると、

$$Av = \lambda v$$

という等式が成り立つ。

このとき、\$v\$ を \$A\$ の**固有ベクトル (eigenvector)**、\$\lambda\$ を \$A\$ の**固有値 (eigenvalue)** と呼ぶ。これが、固有値と固有ベクトルの「定義」である。

ただし

\$v = \mathbf{0}\$ は、明らかに \$Av = \lambda \mathbf{0}\$ を満たすので、いちいち「固有ベクトルと呼ぶまでもない」。よって、固有ベクトルには \$v \neq \mathbf{0}\$ という条件をつけることに決める。

6.2 固有方程式

最初の \$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\$ の例では、\$x\$ 軸上の点を指すベクトル \$v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\$ は、\$A\$ で変換しても向きが変わらず、長さだけが2倍されると分かったので、固有値 \$\lambda = 2\$ と固有ベクトル \$v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\$ (\$a \neq 0\$) を持つといえる。

6.2.1 決まった手続きで求めたい

しかし、変換の意味を考えて、固有値と固有ベクトルを求めるというのを、**毎回やるのはしんどい**ので、「決まった手続きで固有値と固有ベクトルを求める方法はないか？」ということを考えよう。まず、固有値と固有ベクトルの定義を書くと、

$$Av = \lambda v \quad (v \neq \mathbf{0}).$$

左辺に移項すると、

$$Av - \lambda v = \mathbf{0} \quad (v \neq \mathbf{0}).$$

v でくくると,

$$(A - \lambda E)v = \mathbf{0} \quad (v \neq \mathbf{0}).$$

ただし、左辺をくくった結果が $(A - \lambda)v$ ではないことに注意。なぜなら、 $A - \lambda$ は「行列 - スカラー」だから、そもそも定義できない。だから、 $\lambda v = \lambda E v$ とみなして v でくくっている。

これは係数行列が $(A - \lambda E)$ の等質連立一次方程式だ。

- $|A - \lambda E| \neq 0 \Rightarrow v = \mathbf{0}$ (自明な解)
- $|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \underbrace{v = \mathbf{0} \text{ 以外の } v \text{ が存在}}_{\text{固有ベクトル!!}} \text{ (非自明な解)}$

ということで、結局次のような方法で固有値と固有ベクトルは求められることがわかる。

固有値と固有ベクトルの計算

- (i) $|A - \lambda E| = 0$ を解いて、 λ (固有値) を求める。
- (ii) 等質連立一次方程式 $(A - \lambda E)v = \mathbf{0}$ に求めた λ を代入して、掃き出し法で解き、 λ に対応する固有ベクトル $v (\neq \mathbf{0})$ を求める。

そして、最初に出てきた「固有値を解としてもつ」方程式

$$|A - \lambda E| = 0$$

を、固有方程式 (characteristic equation) または特性方程式という*2。

例題 18. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*2 左辺 $|A - \lambda E|$ を固有多項式 (characteristic polynomial) または特性多項式と呼ぶことも。

(i) 実際に、固有方程式から固有値と固有ベクトルを求めてみよう.

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

よって固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

左辺をたすき掛けで計算すると,

$$(2 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0.$$

よって, $\lambda = 2, -2$ が得られた. 最初に考察した「 $\lambda = 2$ 」も, **固有値のひとつとしてきちっと出てきた.**

(ii) 各固有値 $\lambda = 2, \lambda = -2$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ計算してみよう.

• $\lambda = 2$

$\lambda = 2$ を $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ に代入して解く.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}}_{(A - \lambda E)} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}}.$$

$\lambda = 2$ を代入して,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}_{(A - 2E)} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}}.$$

1行目は消えてなくなったので, 2行目を通常の方程式に戻すと,

$$-4v_2 = 0.$$

よって, $v_2 = 0$ が得られる.

そして, 注意すべきことが v_1 の扱いだ. ここで $v_1 = 0$ としてしまう学生が多いが, **誤り**である. なぜなら, v_1 に関する式は **1つも出てきていないのだから**, v_1 の値が **1通りに決まるわけがない**からだ.

この場合は, v_1 に関する条件が「何もない」ので, v_1 は「なんでもよい」が正しい. よって, $v_1 = t$ (t は任意定数) とおいて,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \underbrace{(t \neq 0)}_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}}.$$

このように、「 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトル」として、きちんと「 x 軸上の点を指すベクトル」が出てきた。

• $\lambda = -2$

$(A - \lambda E)v = 0$ の λ に -2 を代入すると、

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(A+2E)} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0.$$

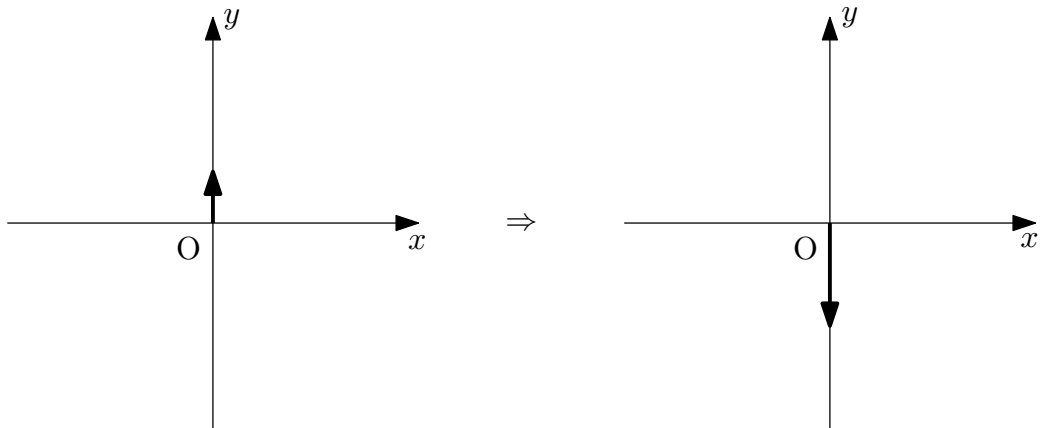
これを通常の方程式に戻すと、

$$4v_1 = 0.$$

よって、 $v_1 = 0$ を得る。そして、先ほどと同様の理由で $v_2 = t$ とおくと、

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

この結果によると、 y 軸上の点を指すベクトルも向きが変わらないということなのだが、実際にこれは、下図のような変換になる。



つまり、この固有ベクトルを A で変換すると、「ベクトルは -2 倍される」。

最初に、固有ベクトルは「変換しても向きが変わらないベクトル」と言ったのだが、これはやや不正確だ。正確には「**行列による固有ベクトルの変換は、(固有値による) スカラー倍で表せる**」と言うべきである (負のスカラー倍のときは向きが逆になるが、それも有り得る)。

6.3 固有方程式を解くときは「因数分解」

一般に、固有方程式を解いて固有値を求めるのはけっこうテクニックがいる。例題で見てみよう。

例題 19. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

固有方程式 ($|A - \lambda E| = 0$) は

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 & -5 \\ -1 & 7 - \lambda & 5 \\ 1 & -9 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

さて、この固有方程式、どうやって λ を求めれば良いだろう？左辺を**サラスの方法**で展開してみると、

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0.$$

となるが、こういう3次方程式を解くのは容易ではない*3.

ので、固有方程式は、まず最初に**行列式の因数分解**が出来るかを試そう. 具体的には、

- (i) 左辺の行列式を因数分解できるならする (これが出来れば、すぐに固有値が求められる).
- (ii) 因数分解できなければ、サラスの方法で展開をする.

という優先順位で考える. **因数分解が上手く行けば、固有値は一瞬で求められる***4のだ. ということで、左辺を因数分解してみよう.

*3 **因数定理 (factor theorem)** を使って解いてもまあ、良いといえば良いのだが、もっとエレガントに固有値を求めたい.

*4 だから、行列式の因数分解は非常に重要なのだ.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & -5 \\ -1 & 7-\lambda & 5 \\ 1 & -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & -5 \\ -1 & 7-\lambda & 5 \\ 1 & -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & -5 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \\ 1 & -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).
\end{aligned}$$

よって結局、固有方程式は

$$(2+\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

これを解いて $\lambda = -2, 2, 3$ と分かる。因数分解が上手くいけば、固有値は綺麗に求めることができる。あとは、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めれば良い。

- $\lambda = -2$

$(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ に、 $\lambda = -2$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 9 & 5 \\ 1 & -9 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと*5、

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 9 & 5 \\ 1 & -9 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & 5 \\ 1 & -9 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと、

$$\begin{cases} v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ 2v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

*5 右辺はどうせゼロなので、拡大係数行列の縦線より右は省略した。

$v_2 = t$ とおくと, $v_3 = -2t$. $v_1 = v_2 + v_3 = t - 2t = -t$. よって, 求める固有ベクトルは,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

• $\lambda = 2$

$(A - \lambda E)\mathbf{w} = \mathbf{0}$ に, $\lambda = 2$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと,

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & -9 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと,

$$\begin{cases} w_1 - 5w_2 - 5w_3 = 0 \\ w_2 + w_3 = 0 \end{cases}$$

$w_3 = s$ とおくと, $w_2 = -s$. $w_1 = 5w_2 + 5w_3 = -5s + 5s = 0$. よって, 求める固有ベクトルは,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0).$$

• $\lambda = 3$

$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に, $\lambda = 3$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -9 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと,

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -9 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & -10 \\ 0 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & -10 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & -10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと,

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 10x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = u$ とおくと、 $x_2 = -u$. $x_1 = 9x_2 + 10x_3 = u$. よって、求める固有ベクトルは、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u \\ -u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0).$$

固有方程式は「いつでも因数分解がうまくいくのか?」というところ、当然ながらそれは「必ずとはいえない」のだが、筆者の肌感覚だと、編入試験については、**9割の問題は、因数分解が上手く出来る形になっている**と感じる。

なぜか頑なに「サラスで展開→因数定理」という方法を取りたがる人がいるのだが、**絶対に因数分解を試みたほうが良い**。「展開して因数定理」の流れは、あくまで因数分解がどうしても出来ない時の苦肉の策だと思っておこう。だって愚直に解きたくないでしょ、3次方程式とか。

6.4 重解の固有値と、その固有ベクトル

例題 20. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

固有方程式を立てると、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

左辺を因数分解すると,

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & \lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)(2-\lambda)^2.
 \end{aligned}$$

よって, 固有方程式は

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

なので, 固有値は $\lambda = 1, 2$ (2重解) となる. 固有ベクトルを求めよう.

- $\lambda = 1$

$(A - \lambda E)v = \mathbf{0}$ に $\lambda = 1$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと,

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

となり、 $v_3 = t$ とおくと、 $v_2 = -t$. $v_1 = 2v_2 + v_3 = -2t + t = -t$. よって、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

• $\lambda = 2$

$(A - \lambda E)\mathbf{w} = \mathbf{0}$ に $\lambda = 2$ を代入する.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと、

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと、

$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ w_3 = 0 \end{cases}$$

となり、 $w_2 = s$ とおくと、 $w_1 = 2s$. よって、

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0).$$

例題 21. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

左辺を因数分解すると,

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ -2 & 2+\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ -2 & 2+\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
 &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)
 \end{aligned}$$

よって, 固有値は $\lambda = 1$ (2重解), 2 である.

• $\lambda = 1$

$(A - \lambda E)v = \mathbf{0}$ に $\lambda = 1$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと,

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式に戻すと,

$$2v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$$

なので, $v_1 = t, v_3 = s$ とおくと, $v_2 = 2t + 2s$ となる. よって, 求める固有ベクトルは

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ 2t + 2s \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0}).$$

- $\lambda = 2$

$(A - \lambda E)\mathbf{w} = \mathbf{0}$ に $\lambda = 2$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを掃き出し法で解くと,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式に戻すと,

$$\begin{cases} -2w_1 + w_2 - 3w_3 = 0 \\ w_2 + w_3 = 0 \end{cases}$$

なので, $w_3 = u$ とおくと, $w_2 = -u, 2w_1 = -u - 3u = -4u, w_1 = -2u$. よって, 求める固有ベクトルは

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2u \\ -u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0).$$

という感じで, 重解の固有値を持つパターン of 例題を 2 問続けて黙々とやってみたわけだが, 注目して欲しいのは, **重解固有値に対応する固有ベクトルの形が, この 2 問では異なっている** という部分だ.

今は詳しくは述べないことにするが, とりあえず「確かになんか違うな」くらいの認識を持っていて貰えば良いと思う. このことは後に, **重解固有値を持つ行列の対角化可能性**を判定するときに, きわめて重要な意味を持つ*6.

6.5 演習問題

- (1) [H26 年度 千葉大学工学部 3 年次編入学試験]

行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と, それに対応する固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*6 実は, 例題 20 の行列は「対角化不可能」な行列, 例題 21 の行列は「対角化可能」な行列である. 詳しくは後ほど.

(2) [H27 年度 はこだて未来大学]

3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について、次の間に答えよ.

- (i) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (ii) 前問で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(3) [H27 年度 豊橋技術科学大学 3 年次編入学試験]

次の行列 B の最小固有値と、それに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) [H28 信州大学工学部 3 年次編入学試験]

 A の固有値と B の固有値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr}A)\lambda + |A| = 0$$

であることを証明しなさい. ただし $\operatorname{tr}A$ は A の対角成分の和 (トレース) を表す.

(6) [H26 仙台高専専攻科入試問題]

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 $\lambda = -1$ を持つ. 以下の間に答えよ.

- (i) $\lambda = -1$ 以外の固有値を求めよ.
- (ii) $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求めよ.

(7) [H28 年度 名古屋工業大学 3 年次編入試験問題]

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ。また、 A の最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(8) [H27 年度 香川大学工学部 編入学試験]

以下に示す対称行列 A について次の各問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (i) 行列 A の固有値を求めよ。
- (ii) 行列 A の固有ベクトルを求めよ。