

高専入試対策コース 数学 / 基礎

まえがき

高専受験生のみなさん、こんにちは。

今このテキストを読んでいる君が、「高専」という学校に憧れを抱き、周囲のほとんどの学生とは違う道に踏み出すことを決意し、そして実際に「高専入試」に挑もうとしていることを、心からうれしく思います。

君はまだ中学生だ。中学生くらいの年齢ですでに「この学校に行きたい!」と自分で宣言して、そこに向かって具体的なアクションを起こそうとしている。それだけで、君はなんというか、世の中の大半の人たちとはすでに一線を画した人間であることは間違いない。だから、君には是非「高専」という学校に合格し、立派な高専生になって欲しい。これが、僕らの心からの願いです。

さて、高専入試数学の出題傾向の大きな特徴は、中学3年生の内容、しかも後半に学習する内容に偏っているということ。だから、『とりあえず過去問にチャレンジしてみたいいいけど、手も足も出なかった』なんて人も多いんじゃないでしょうか。

でもそれは『解けない』んじゃなくて、ただ『知らない』だけ。

そこで、高専入試の対策としては、以下のようなステップを踏んで勉強していこう。

1. 中学3年までに学習する内容をとにかく早く終わらせてしまう。(8割程度の理解でもOK)
2. 過去問の大問1(基本的な小問集合)と、大問2以降の(1), (2)くらいまでを確実に得点できるように演習を重ねる。
3. 残りの期間で(3)以降の難しい問題をなるべく得点できるように演習を重ねる。

このテキストでは、1をメインに2の途中くらいまでを完了できるように、中学3年生で学習する内容のほとんどを、高専入試で出題されがちな分野に比重を置きながら、効率的に総ざらいしていきます。

学校の授業を待たず、どんどん先へ先へと進み全て終わらせてしまった上で、とにかく演習に時間を割いていきましょう。

やらなきゃいけないことが明確になったら、なんだかいいそうな気がしてきたはず。

だからあとは、君が信念とともに、今、動き出すかどうか。それだけが鍵なのです。

立派な高専生としての君が、あと何ヶ月かで誕生していることを、心の底から願っています。

さあ、それでは勉強を始めましょう。

1. 根号を含む式の乗除

Point

a, b を正の数として, 積: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$)

商: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($\sqrt{a} \div b = \frac{\sqrt{a}}{b}$ $a \div \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{b}}$)

『ルートの中の2乗』は2乗を外して外に出せる(中に入れられる)

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$$

*素因数分解・・・『ある正の整数』を『素数の積』で表すこと。

中身が大きな数のときは素因数分解をすることで、2乗の数を見つけて、ルートの外に出して整理する。

例題

1. 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$

(2) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$

2. 次の数を $\sqrt{a}$ の形に表しなさい。

(1) $4\sqrt{5}$

(2) $2\sqrt{2}$

3. 次の数を $a\sqrt{b}$ の形に表しなさい。

(1) $\sqrt{12}$

(2) $\sqrt{27}$

4. 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

(2) $\sqrt{14} \times \sqrt{21}$

解答

1.

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2 \times 7} = \sqrt{14}$

(2) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{18}{6}} = \sqrt{3}$

(2) 別解 $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2 \times 3^2}}{\sqrt{2 \times 3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

2.

(1) $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \times 5} = \sqrt{80}$

(2) $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{8}$

3.

(1) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

4.

(1) $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{2^2 \times 3} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{14} \times \sqrt{21} = \sqrt{2 \times 7} \times \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{2}\sqrt{7} \times \sqrt{3}\sqrt{7} = 7\sqrt{6}$

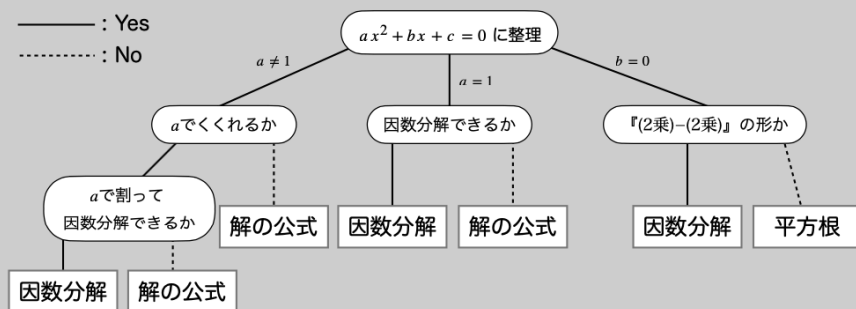
3. いろいろな二次方程式

Point

* 二次方程式解き方チャート *

—— : Yes

----- : No



例題

1. 次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

(2) $x^2 + 4x - 12 = 0$

(3) $x^2 - 49 = 0$

2. 次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 - 2x = 4x + 24$

(2) $(x - 3)^2 = 6x - 2$

解答

1.

(1) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

解の公式に $a = 3, b = 8, c = 2$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \\
 &= \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{6} \\
 &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{6} \\
 &= \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3}
 \end{aligned}$$

(2) $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$\begin{aligned}
 (x + 6)(x - 2) &= 0 \\
 x &= -6, 2
 \end{aligned}$$

(3) $x^2 - 49 = 0$

$$\begin{aligned}
 (x + 7)(x - 7) &= 0 \\
 x &= \pm 7
 \end{aligned}$$

2.

(1) $3x^2 - 2x = 4x + 24$

$$3x^2 - 2x - 4x - 24 = 0$$

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 4, -2$$

(2) $(x - 3)^2 = 6x - 2$

$$x^2 - 6x + 9 = 6x - 2$$

$$x^2 - 6x + 9 - 6x + 2 = 0$$

$$x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$(x - 1)(x - 11) = 0$$

$$x = 1, 11$$

第8講 2乗に比例する関数

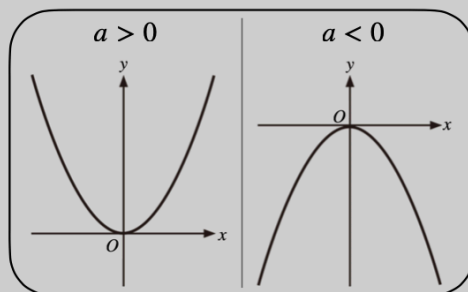
1. 関数 $y = ax^2$ とそのグラフ

Point $y = ax^2$ のグラフは2パターン。 $a > 0$ では下に凸, $a < 0$ では上に凸。

* 2乗に比例する関数・・・ $y = ax^2$ の形をした関数のこと。

* 比例定数・・・ $y = ax^2$ の定数 a のこと。

* $y = ax^2$ のグラフの特徴 *



- 1, 原点を通る。
- 2, y 軸について対称。
- 3, $a > 0$ の場合, 下にとがっている。
- 4, $a < 0$ の場合, 上にとがっている。

解答

1.

(1) (円の面積)=(半径)×(半径)×(円周率)より, $y = \pi x^2$

(2) $y = \pi x^2$ に $x = 3, 5$ をそれぞれ代入して,

$$x = 3 \text{ のとき } y = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$x = 5 \text{ のとき } y = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

(3) 半径 x に対してその2倍は $2x$ と表されるので, その面積は,

$$\begin{aligned} y &= \pi \times (2x)^2 \\ &= 4\pi x^2 \end{aligned}$$

もとの面積は πx^2 であったので, 半径が2倍になると,
面積は πx^2 から $4\pi x^2$, すなわち, 4倍となる。

2.

2乗に比例する関数は, 比例定数を a とおいて, $y = ax^2$ と表せる。

(1) $y = ax^2$ に $x = 3, y = 27$ を代入して,

$$\begin{aligned} 27 &= a \times 3^2 \\ 9a &= 27 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{よって } y = 3x^2$$

(2) $y = ax^2$ に $x = 1, y = -5$ を代入して,

$$\begin{aligned} -5 &= a \times 1^2 \\ a &= -5 \end{aligned}$$

$$\text{よって } y = -5x^2$$

例題

1. 半径が x cm の円の面積を y cm² とするとき, 次の問に答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。
- (2) 半径が 3cm, 5cm のときの面積をそれぞれ求めなさい。
- (3) 半径が2倍になると, 面積は何倍になるか。

2. y は x の2乗に比例し, 次の条件をみたすとき, y を x の式で表しなさい。

- (1) $x = 3$ のとき $y = 27$
- (2) $x = 1$ のとき $y = -5$

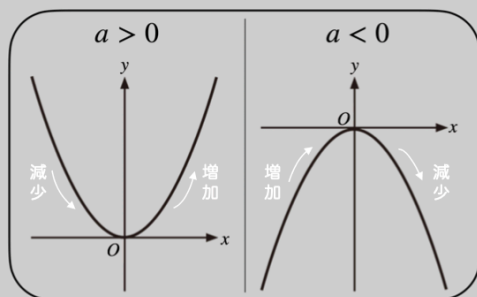
2. 関数 $y = ax^2$ の値の増減

Point $a > 0$ では『減少 → 最小値 → 増加』, $a < 0$ では『増加 → 最大値 → 減少』

* 変化の割合 . . . $\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})}$ で求められる値のこと。2点を通る直線の傾きを表す。

* 変域 . . . 文字がとる(変化する)値の範囲(領域)のこと。

*** $y = ax^2$ の値の増減 ***



* $a > 0$ のとき

x の値が増加すると,

- $x < 0$. . . 減少
- $x = 0$. . . 最小値 0
- $x > 0$. . . 増加

* $a < 0$ のとき

x の値が増加すると,

- $x < 0$. . . 増加
- $x = 0$. . . 最大値 0
- $x > 0$. . . 減少

解答

1.

$$(1) x = 3 \text{ のとき, } y = 2 \times 3^2 = 18$$

$$x = 5 \text{ のとき, } y = 2 \times 5^2 = 50$$

したがって, x, y それぞれの増加量は,

$$(x \text{ の増加量}) = 5 - 2 = 3 \quad (y \text{ の増加量}) = 50 - 18 = 32$$

となる。よって,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{32}{3} = 16$$

$$(2) x = -5 \text{ のとき, } y = 2 \times (-5)^2 = 50$$

$$x = -2 \text{ のとき, } y = 2 \times (-2)^2 = 8$$

したがって, x, y それぞれの増加量は,

$$(x \text{ の増加量}) = (-2) - (-5) = 3 \quad (y \text{ の増加量}) = 8 - 50 = -42$$

となる。よって,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-42}{3} = -14$$

2.

関数 $y = 3x^2$ について,

x の変域に $x = 0$ を含んでいるから, 最小値は頂点で取ることがわかるので,

最小値: $x = 0$ のとき, $y = 0$

最大値: $x = -2$ のとき, $y = 12$ となる。

よって, 求める y の変域は $0 \leq y \leq 12$

例題

1. 関数 $y = 2x^2$ について, x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 3 から 5 まで

(2) -5 から -2 まで

2. 関数 $y = 3x^2$ について, x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のときの y の変域を求めなさい。

Note

練習

1. 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 2 から 4 まで

(2) -4 から -1 まで

2. 関数 $y = x^2$ について、 x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $2 \leq x \leq 4$

(2) $-2 \leq x \leq 1$

(3) $-4 \leq x \leq -2$



【令和2年度 本試験】

3. 関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ について、 x の値が-3から7まで増加するときの変化の割合は である。