高専入試対策コース

数学/基礎

高専入試/高専のための学習塾
ナレッジスター

まえがき

高専受験生のみなさん、こんにちは。
今このテキストを読んでくれている君が、「高専」という学校に憧れを抱き、周囲のほとんどの学生とは違う道に踏み出すことを決意し、そして実際に「高専入試」に挑もうとしていることを、心からうれしく思います。

君はまだ中学生だ。中学生くらいの年齢ですでに「この学校に行きたい!」と自分で宣言して、そこに向かって具体的なアクションを起こそうとしている。それだけで、君はなんというか、世の中の大半の人たちとはすでに一線を画した人間であることは間違いない。だから、君には是非「高専」という学校に合格し、立派な高専生になって欲しい。これが、僕らの心からの願いです。

さて、高専入試数学の出題傾向の大きな特徴は、中学3年生の内容、しかも後半に学習する内容に偏っているということ。だから、『とりあえず過去問にチャレンジしてみたはいいけど、手も足も出なかった』なんて人も多いんじゃないでしょうか。
でもそれは『解けない』んじゃなくて、ただ『知らない』だけ。
そこで、高専入試の対策としては、以下のようなステップを踏んで勉強していこう。

1. 中学３年までに学習する内容をとにかく早く終わらせてしまう。(８割程度の理解でもOK)
2. 過去問の大問１(基本的な小問集合)と、大問２以降の(1), (2)くらいまでを確実に得点できるように演習を重ねる。
3. 残りの期間で(3)以降の難しい問題をなるべく得点できるように演習を重ねる。

このテキストでは、１をメインに２の途中くらいまでを完了できるように、中学３年生で学習する内容のほとんどを、高専入試で出題されがちな分野に比重を置きながら、効率的に総ざらいしていきます。
学校の授業を待たず、どんどん先へ先へと進み全て終わらせてしまった上で、とにかく演習に時間を割いていきましょう。

やらなきゃいけないことが明確になったら、なんだかいけそうな気がしてきたはず。
だからあとは、君が信念とともに、今、動き出すかどうか。それだけが鍵なのです。

立派な高専生としての君が、あと何ヶ月かで誕生していることを、心の底から願っています。
さぁ、それでは勉強を始めましょう。

ナレッジスター　渡部 滉也

第５講　混合を含む式の計算

１. 根号を含む式の乗除

Point

a，b を正の数として，

積：$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　　（ $a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$ ）

商：$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　　　（ $\sqrt{a}\div b=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$　$a\div\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ ）

＊『ルートの中の２乗』は２乗を外して外に出せる (中に入れられる) ＊

$$\sqrt{\boxed{a^2}b}=\boxed{a}\sqrt{b}$$

＊素因数分解・・・『ある正の整数』を『素数の積』で表すこと。
中身が大きな数のときは素因数分解をすることで，２乗の数を見つけて，
ルートの外に出して整理する。

例題

1. 次の計算をしなさい。
(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$

2. 次の数を $\sqrt{a}$ の形に表しなさい。
(1) $4\sqrt{5}$　　(2) $2\sqrt{2}$

3. 次の数を $a\sqrt{b}$ の形に表しなさい。
(1) $\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{27}$

4. 次の計算をしなさい。
(1) $\sqrt{18}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{21}$

解答

1.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{2\times7}$
$=\sqrt{14}$

(2) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{18}{6}}$
$=\sqrt{3}$

(2) 別解　素因数分解
$\dfrac{\sqrt{\boxed{18}}}{\sqrt{\boxed{6}}}=\dfrac{\sqrt{\boxed{2\times3^2}}}{\sqrt{\boxed{2\times3}}}$
$=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$
$=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{3}$

2.

２乗して中に入れる

(1) $\boxed{4}\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{4^2}\times5}$
$=\sqrt{80}$

(2) $\boxed{2}\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{2^2}\times2}$
$=\sqrt{8}$

3.

(1) $\sqrt{\boxed{12}}=\sqrt{\boxed{2^2\times3}}$
$=2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{\boxed{27}}=\sqrt{\boxed{3^3}}=\boxed{3^2}\times3$
$=3\sqrt{3}$

4.

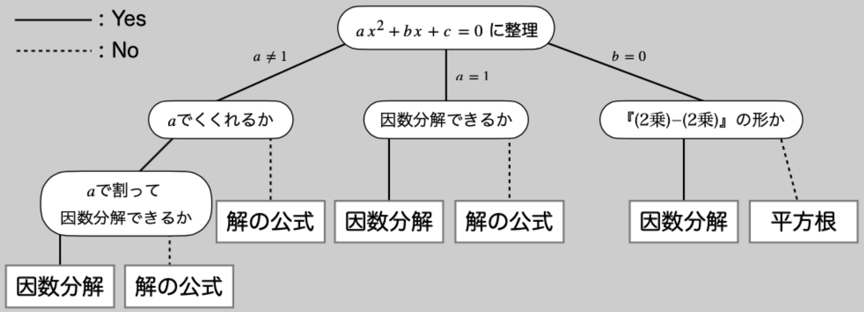
(1) $\sqrt{18}\times\sqrt{12}=\sqrt{2\times3^2}\times\sqrt{2^2\times3}$
$=3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}$
$=3\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$
$=6\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{21}=\sqrt{2\times7}\times\sqrt{3\times7}$
$=\sqrt{2}\sqrt{7}\times\sqrt{3}\sqrt{7}$
$=7\sqrt{6}$

3. いろいろな二次方程式

Point

＊二次方程式解き方チャート＊



例題

1. 次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2+8x+2=0$

(2) $x^2+4x-12=0$

(3) $x^2-49=0$

2. 次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2-2x=4x+24$

(2) $(x-3)^2=6x-2$

解答

1.

(1) $3x^2+8x+2=0$

解の公式に $a=3, b=8, c=2$ を代入すると,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4\times3\times2}}{2\times3} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{6} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x^2+4x-12&=0 \\ (x+6)(x-2)&=0 \\ x&=-6, 2 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x^2-49&=0 \\ (x+7)(x-7)&=0 \\ x&=\pm 7 \end{aligned}$$

2.

(1)
$$\begin{aligned} 3x^2-2x&=4x+24 \\ 3x^2-2x-4x-24&=0 \\ 3x^2-6x-24&=0 \\ x^2-2x-8&=0 \\ (x-4)(x+2)&=0 \\ x&=4, -2 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} (x-3)^2&=6x-2 \\ x^2-6x+9&=6x-2 \\ x^2-6x+9-6x+2&=0 \\ x^2-12x+11&=0 \\ (x-1)(x-11)&=0 \\ x&=1, 11 \end{aligned}$$

第８講　２乗に比例する関数

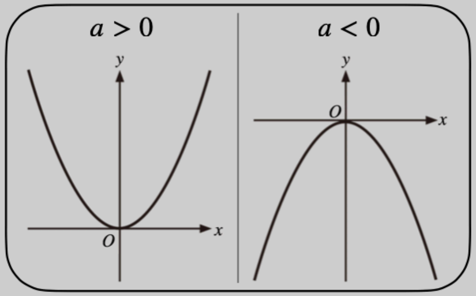
1．関数 $y=ax^2$ とそのグラフ

Point　$y=ax^2$ のグラフは2パターン。$a>0$ では下に凸，$a<0$ では上に凸。

＊２乗に比例する関数・・・$y=ax^2$ の形をした関数のこと。

＊比例定数・・・$y=ax^2$ の定数 a のこと。

＊$y=ax^2$ のグラフの特徴＊



1，原点を通る。

2，y 軸について対称。

3，$a>0$ の場合，下にとがっている。

4，$a<0$ の場合，上にとがっている。

例題

1．半径が x cm の円の面積を y cm^2 とするとき，次の問に答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) 半径が 3cm，5cm のときの面積をそれぞれ求めなさい。

(3) 半径が２倍になると，面積は何倍になるか。

2．y は x の２乗に比例し，次の条件をみたすとき，y を x の式で表しなさい。

(1)　$x=3$ のとき $y=27$

(2)　$x=1$ のとき $y=-5$

解答

1．

(1) (円の面積)=(半径)×(半径)×(円周率)より，$y=\pi x^2$

(2) $y=\pi x^2$ に$x=3$，5 をそれぞれ代入して，

$x=3$ のとき $y=9\pi$ (cm^2)

$x=5$ のとき $y=25\pi$ (cm^2)

(3) 半径 x に対してその２倍は $2x$ と表されるので，その面積は，

$$y=\pi\times(2x)^2$$
$$=4\pi x^2$$

もとの面積は πx^2 であったので，半径が２倍になると，

面積は πx^2 から $4\pi x^2$，すなわち，４倍となる。

2．

２乗に比例する関数は，比例定数を a とおいて，$y=ax^2$ と表せる。

(1) $y=ax^2$ に $x=3$，$y=27$ を代入して，

$$27=a\times 3^2$$
$$9a=27$$
$$a=3$$

よって $y=3x^2$

(2) $y=ax^2$ に $x=1$，$y=-5$ を代入して，

$$-5=a\times 1^2$$
$$a=-5$$

よって $y=-5x^2$

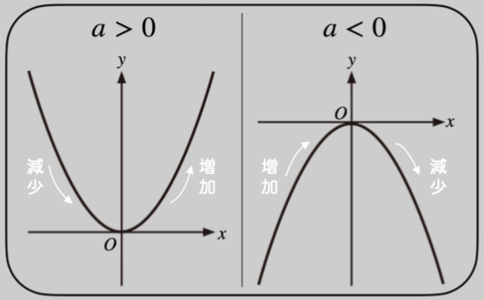
2. 関数 $y = ax^2$ の値の増減

Point $a > 0$ では『減少 → 最小値 → 増加』，$a < 0$ では『増加 → 最大値 → 減少』

＊変化の割合・・・$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ で求められる値のこと。2点を通る直線の傾きを表す。

＊変域・・・文字がとる(変化する)値の範囲(領域)のこと。

＊ $y = ax^2$ の値の増減＊



* $a > 0$ のとき

x の値が増加すると，

・$x < 0$ ・・・減少

・$x = 0$ ・・・最小値 0

・$x > 0$ ・・・増加

* $a < 0$ のとき

x の値が増加すると，

・$x < 0$ ・・・増加

・$x = 0$ ・・・最大値 0

・$x > 0$ ・・・減少

例題

1. 関数 $y = 2x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 3から5まで

(2) −5から−2まで

2. 関数 $y = 3x^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のときの y の変域を求めなさい。

解答

1.

(1) $x = 3$のとき，$y = 2 \times 3^2 = 18$

$x = 5$のとき，$y = 2 \times 5^2 = 50$

したがって，x, y それぞれの増加量は，

$(x\text{の増加量}) = 5 - 2 = 3$　　$(y\text{の増加量}) = 50 - 18 = 32$

となる。よって，

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})} = \frac{32}{2} = 16$$

(2) $x = -5$のとき，$y = 2 \times (-5)^2 = 50$

$x = -2$のとき，$y = 2 \times (-2)^2 = 8$

したがって，x, y それぞれの増加量は，

$(x\text{の増加量}) = (-2) - (-5) = 3$　　$(y\text{の増加量}) = 8 - 50 = -42$

となる。よって，

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})} = \frac{-42}{3} = -14$$

2.

関数 $y = 3x^2$ について，

x の変域に $x = 0$ を含んでいるから，最小値は頂点で取ることがわかるので，

最小値：$x = 0$ のとき，$y = 0$

最大値：$x = -2$ のとき，$y = 12$ となる。

よって，求める y の変域は $0 \leqq y \leqq 12$

Note

練習

1．関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 2 から 4 まで

(2) -4 から -1 まで

2．関数 $y=x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1)　$2 \leqq x \leqq 4$

(2)　$-2 \leqq x \leqq 1$

(3)　$-4 \leqq x \leqq -2$

【令和２年度 本試験】

3．関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ について，x の値が-3から 7 まで増加するときの変化の割合は $\boxed{}$ である。

2. 三角形の相似条件

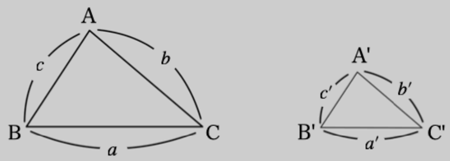
Point

＊三角形の相似条件＊

２つの三角形は次のどれかが成立するとき相似である。

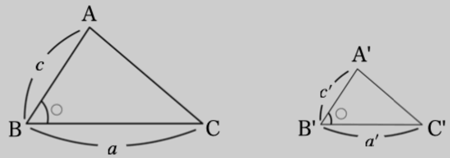
① ３組の辺の比が全て等しい。

$a : a' = b : b' = c : c'$



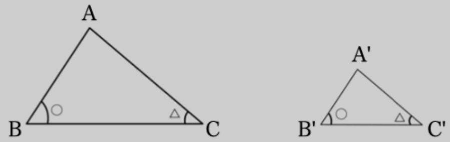
② ２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。

$a : a' = c : c'$， $\angle B = \angle B'$



③ ２組の角がそれぞれ等しい。

$\angle B = \angle B'$， $\angle C = \angle C'$



＊三角形の合同条件＊

※合同条件は『相似かつ相似比が１:１』であるような場合のものになっている。

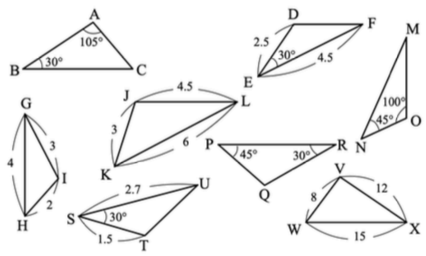
① ３組の辺がそれぞれ等しい。

② ２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。

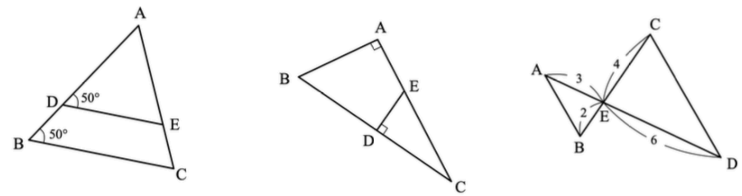
③ １組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

例題

1．下図の中から，相似な三角形の組を見つけ，記号 ∽ を使って表しなさい。
　また，そのときに使った相似条件を答えなさい。



2．下のそれぞれの図で，相似な三角形を記号 ∽ を使って表しなさい。
　また，そのときに使った相似条件を答えなさい。



解答

1．

$\triangle ABC \backsim \triangle QRP$

… ２組の角がそれぞれ等しい。($\angle A = \angle Q = 105°$，$\angle B = \angle R = 30°$)

$\triangle DEF \backsim \triangle TSU$

… ２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。($DE : TS = EF : SU = 5 : 3$ ，$\angle E = \angle S = 30°$)

$\triangle GHI \backsim \triangle LKJ$

… ３組の辺の比が全て等しい。($GH : LK = HI : KJ = IG : JL = 2 : 3$)

2.

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

… ２組の角がそれぞれ等しい。($\angle B = \angle D = 50°$，$\angle A$は共通)

$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$

… ２組の角がそれぞれ等しい。($\angle BAC = \angle EDC = 90°$，$\angle C$は共通)

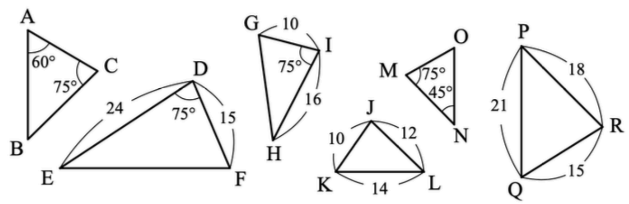
$\triangle ABE \backsim \triangle DCE$

…２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。($\angle AEB = \angle DEC$ ，$BE : CE = AE : DE = 1 : 2$)

Note

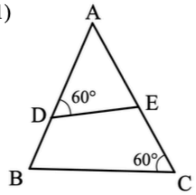
練習

1．下の図の中から，相似な三角形の組を見つけ，記号 ∽ を使って表しなさい。
また，そのときに使った相似条件を答えなさい。

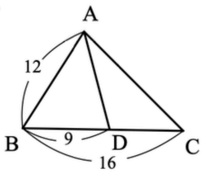


2．下のそれぞれの図で，相似な三角形を記号 ∽ を使って表しなさい。
また，そのときに使った相似条件を答えなさい。

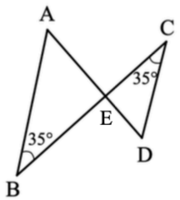
(1)



(2)



(3)



(4)